$\boxed{1}$ 次の不定積分と定積分を求めよ．(30 点)

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x+2)}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,dx$ （ヒント：$(\log x)\dfrac{1}{x^2}$ と考えて部分積分）

(1) $(与式) = \displaystyle\int x^{\frac{1}{3}-1}\,dx = \int x^{-2/3}\,dx \underset{5}{=} 3x^{1/3} + C$ （C は積分定数）

フゴウミス → 5点とする

(2) $\dfrac{x+1}{x(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2}$ とおくと．

$x+1 = A(x+2) + Bx$　　$\therefore\ (A+B-1)x + 2A - 1 = 0$

$\therefore\ A+B-1=0,\ 2A-1=0$　　$\therefore\ A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \displaystyle\int \frac{x+1}{x(x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2} \underset{5}{=} \frac{1}{2}\log|x| + \frac{1}{2}\log|x+2| + C$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log|x(x+2)| + C$ （C は積分定数）

$\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{2x} = \frac{1}{2}\log|2x|$ と計算する者も多い

$|\ |$ は不問

ここでミスは3点

(3) $(与式) = \displaystyle\int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx = \left[\left(-\frac{1}{x}\right)\log x\right]_1^e - \int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'\,dx$ 5

$\displaystyle = -\frac{1}{e}\log e + \frac{1}{1}\log 1 + \int_1^e \frac{1}{x}\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{e} + 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$\displaystyle = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} = 1 - \frac{2}{e}$

$\log x = \{x(\log x + 1)\}'$ として、部分積分を1回正しければ3点 まちがっていれば0点

(3) 不定積分 $= -\dfrac{\log x + 1}{x} + C$ を求めたら…6点

(2) 別解　$\{x(x+2)\}' = 2x+2 = 2(x+1)$

$\displaystyle\therefore\ \int\frac{x+1}{x(x+2)} = \int\frac{\frac{1}{2}d(x(x+2))}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\log|x(x+2)| + C$

(1) 別解　$t = \sqrt[3]{x}$ とおくと…

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2007 年 2 月 8 日	保倉・田嶋 林・小野田			30

2 次の2重積分の値を求めよ．(30点)

(1) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dxdy \qquad D: -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy \qquad D: 0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle\iint_D (y-e^x)^2\,dxdy \qquad D: 0 \leqq y \leqq e^x,\ 0 \leqq x \leqq 1$

(1) (与式) $\displaystyle = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy\ (x-y) = \int_{-1}^{1} dx \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^{1} dx \left(x - \frac{1}{2}\right)$

1　3　6

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$

9

$2\cos\frac{3}{2}y\sin\frac{1}{2}y$

(2) (与式) $\displaystyle = \int_0^{\pi/4} dy \int_0^y dx\ \cos(x+y) = \int_0^{\pi/4} dy \left[\sin(x+y)\right]_{x=0}^{x=y} = \int_0^{\pi/4} dy\ (\sin 2y - \sin y)$

1　3　6

$\displaystyle = \left[-\frac{1}{2}\cos 2y + \cos y\right]_{y=0}^{y=\pi/4} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 0 - \cos 0$

9

$\displaystyle = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

(3) (与式) $\displaystyle = \int_0^1 dx \int_0^{e^x} dy\ (y-e^x)^2 = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3}(y-e^x)^3\right]_{y=0}^{y=e^x}$

1　3

$\displaystyle = \int_0^1 dx\ \frac{1}{3}e^{3x} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{9}(e^3-1)$

6　9

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　名	得点
微分積分 II 期末試験	2007年 2月8日	保倉・田嶋 林・小野田			30

3 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を利用して，次の2重積分の値を求めよ．(20点)

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: x^2+y^2 \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: x^2+y^2 \leqq 4$

式…3点

$\int_0^1 dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$ 　2　2　1　1

(1) (与式) $= \displaystyle\int_0^1 dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r = \left\{\int_0^1 r^2 dr\right\}\left\{\int_0^{2\pi} d\theta\right\} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

5 　9 　10

(2) (与式) $= \displaystyle\int_0^2 dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{r^2} = \left\{\int_0^2 e^{r^2} r\,dr\right\}\left\{\int_0^{2\pi} d\theta\right\}$

5 　$\frac{1}{2}(e^4-1)$ 3点 　2π 1点 　9

$t = r^2$ とおくと．$dt = 2r\,dr$

$\displaystyle\int e^{r^2} r\,dr = \int e^t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{r^2} + C$

$\displaystyle\therefore \int_0^2 e^{r^2} r\,dr = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{1}{2}(e^4-1)$ …… 3 (部分点なし)

$\displaystyle\therefore$ (与式) $= \frac{e^4-1}{2}\cdot 2\pi = \pi(e^4-1)$

ヤコビアン r を忘れたら

(1) $\displaystyle\int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$ …… 3点，ヤコビアン忘れで それ以上のまちがい …0点

(2) $\displaystyle\int_0^2 e^{r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta$ …… 求まらないはずなので 0点

(1) $\sqrt{x^2+y^2} = r^2$ とまちがえたら 　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ …… 7点

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 dr$ としたら …… $\frac{4}{3}\pi$ …… 8点

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2007年 2月8日	保倉・田嶋 林・小野田			20

[4] 以下の問いに答えよ．(20 点)

(1) 次の曲線 C（サイクロイド）の長さを求めよ．

$$C: \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2) 累次積分 $K = \int_0^1 dx \int_2^3 x^y\, dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^y\, dy \right) dx$ について，$K = \iint_D x^y\, dxdy$

となる座標平面上の図形 D を図示せよ．また，積分の順序を入れ換え，K の値を求めよ．

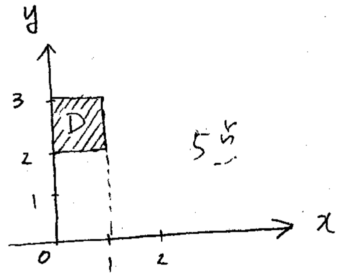
(1) $(長さ) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$ 2 4

$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$ これのみ…2点 6

$= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi}$ 8

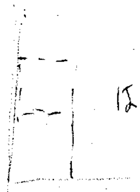
$= -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a$

(2)



5点

は2点



は3点

$K = \int_2^3 dy \int_0^1 dx\, x^y = \int_2^3 dy \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \int_2^3 dy\, \frac{1}{y+1} = \Big[\log|y+1|\Big]_{y=2}^{y=3}$ 1 2 3 4

$= \log 4 - \log 3 = \log\frac{4}{3}$ 5

$\int x^y dy = \frac{x^y}{\log x} + C$, $K = \int_0^1 dx \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_{y=2}^{y=3} = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{\log 3} - \frac{x^2}{\log 2}\right) dx$ 1 2

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2007 年 2 月 8 日	保倉・田嶋 林・小野田			20