福井大学工学部 (電気電子・情報メディア・物理・知能システム) 工学科 1年生対象、田嶋教員担当、2006 年 12 月 12 日 1 限実施

微分積分 II (B) 中間試験問題用紙

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。ただし問題【12】だけは導出過程を記す必要はない。

【1】 $I = \displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めよ。

【2】 $I = \displaystyle\int x\,\log x\,dx$ を求めよ。

【3】 $I = \displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ を求めよ。

【4】 $I = \displaystyle\int x\,\sin x\,dx$ を求めよ。

【5】 $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ を求めよ。

【6】 $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ を求めよ。

【7】 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ。

【8】 $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

【9】 $I' = \displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} f(t)\,dt$ を求めよ。

【10】 $I' = \displaystyle\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$ を求めよ。

【11】 積分公式 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$ を利用して、
$I = \displaystyle\int \sqrt{2x^2+3}\,dx$ を求めよ。

【12】 極座標表示された曲線 $r = \dfrac{\theta}{\pi}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の概形を解答用紙の (ア) 欄に描け。
また、この曲線の弧長は $L = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\boxed{(イ)}}\,d\theta$ と表されるとして、$\boxed{(イ)}$ に当てはまる数式（θ は含んでよいが r は含まない）を解答用紙の（イ）欄に書け（導出過程は記さず最終的な答のみを書け）。

【13】 $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\,(1+\sqrt{x}\,)^2}\,dx$ を求めよ。(ヒント： $t = \sqrt{x}$ と置いて置換積分するとよい。)

【14】 $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ を求めよ。(ヒント： $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置いて置換積分するとよい。)

[1] $\frac{1}{x} = (\log x)'$ に注目して置換積分法を適用する.

$$I = \int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x \ (\log x)' dx = \int \log x \, d(\log x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

[2] 部分積分法を使って、$\log x$ を $(\log x)' = \frac{1}{x}$ に変えることで積分が求まる。

$$I = \int x \log x \, dx = \int \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)' \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 (\log x)' dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

[3] $\sin x$ の奇数乗は $t = \cos x$ とおき、$\cos x$ の奇数乗は $t = \sin x$ とおいて置換積分する。

$$I = \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \ \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx$$
$$= \int (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

[4] 部分積分法を使って、x を $(x)' = 1$ に変えることで積分が求まる。

$$I = \int x \sin x \, dx = \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

[5] $x = \frac{1}{2}(1+x^2)'$ に気がつけば、$t = 1+x^2$ とおいて置換積分すれば良いとわかる。

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2} d(1+x^2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

[6] 有理関数は部分分数分解してから積分する.

$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ とおくと. $1 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B$

$\therefore A + B = 0,\ -2A - B = 1 \qquad \therefore A = -1,\ B = 1$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = -\log|x-1| + \log|x-2| + C = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$$

[7] 積分区間の両端 $x = \pm 1$ で被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は無限大に発散するが、定積分値は収束することが以下の計算で示される。

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

[8] 積分区間 $[0, \infty)$ は無限の長さがあるが、積分値は収束することが以下の計算で示される。

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^\infty = \arctan\infty - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

[9] $F(t) = \int f(t)\,dt$ (すなわち $F'(x) = f(x)$) とすると微分積分学の基本定理により $I' = \frac{d}{dx}\int_x^{x^2} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x^2) - F(x)\}$. $u = x^2$ とおくと.

$\frac{d}{dx}F(x^2) = \left\{\frac{d}{du}F(u)\right\}\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\frac{d}{dx}x^2 = f(x^2)\cdot 2x$. また、$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

$\therefore\ I' = 2x f(x^2) - f(x)$

[10] $F(t) = \int e^{-t^2}dt$ とする。$F(t)$ は誤差関数という習っていない関数を使わないと表せないが、I' は微分積分学の基本定理のお蔭で F を使わずに表すことができる。 $I' = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(0)\} = e^{-x^2}$

[11] 一次変換により公式にあてはめる能力は応用上、非常に重要です。

$I = \int\sqrt{2x^2+3}\,dx = \sqrt{3}\int\sqrt{\frac{2}{3}x^2+1}\,dx$ だから、$t = \sqrt{\frac{2}{3}}x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$I = \sqrt{3}\int\sqrt{t^2+1}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{3}{\sqrt{2}}\int\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right) + C'$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\sqrt{\frac{2}{3}x^2+1} + \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\log\left|\sqrt{\frac{2}{3}}x + \sqrt{\frac{2}{3}x^2+1}\right| + C'$$

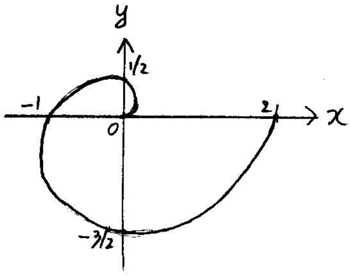
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|\right\} + C'$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right| + C'$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left(x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right) + C \quad \left(\text{ただし } C = C' + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ とした}\right)$$

$\log(ab) = \log a + \log b$ であることを利用して、$\log$ の引数の複雑な係数を積分定数に押し込めることで、不定積分の表式をなるべく簡単な形にすることが望ましい。

[12] (ア) 5点



逆回りに描いたら3点．

(イ) 5点 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\boxed{\frac{\theta^2+1}{\pi^2}}}\, d\theta$$

[13] $t = \sqrt{x}$ とおくと、$t^2 = x$ ， ∴ $2t\,dt = dx$ (これをまちがえたら0点)

$$I = \int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})^2} = \int \frac{2t\,dt}{t^2(1+t)^2} = 2\int \frac{1}{t(1+t)^2}\,dt.$$ (ここまでで5点)

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$$ とおくと (ここで10点) (この形に部分分数分解できるということを講義で習ったはずです)

$$1 = A(1+t)^2 + Bt(1+t) + Ct = (A+B)t^2 + (2A+B+C)t + A$$

∴ $A+B=0$, $2A+B+C=0$, $A=1$ ∴ $A=1$, $B=-1$, $C=-1$

$$\therefore I = 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt = 2\log|t| - 2\log|1+t| + \frac{2}{1+t} + C$$

$$= \frac{2}{1+t} + 2\log\left|\frac{t}{1+t}\right| + C = \frac{2}{1+\sqrt{x}} + 2\log\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) + C$$

[14] 以下で使う三角関数の公式をまとめておくと．

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \text{より} \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \text{より} \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \text{より} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと．

$$\therefore \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2} = \frac{1+t^2}{2}$$ $\left((\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\right.$ を使った$\left.\right)$

$$\therefore I = \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{1}{\sin x}\frac{dx}{dt}\,dt = \int\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

部分点は $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ に5点, $\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$ に5点.

(補足説明)

[1] $(\log x)^2$ を $\log^2 x$ と書くのは一般に通用する表記法ではありません。

このような書き方は三角関数と双曲線関数にだけ使いましょう。

[3] 別解として、$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$ と書き直してから積分して得られる

$I = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$ も正解です。これは解答と同値な数式(Cも同じ)です。

[3]「これはしてくれるな!」という間違い方は、$I = \int \cos^3 x\, dx \overset{誤}{=} \frac{1}{4}\cos^4 x \cdot \frac{1}{-\sin x} + C$

です。$t = \cos x$ とおくと、$dx = \frac{dt}{-\sin x}$ なので $I = \int t^3 \frac{dt}{-\sin x}$ となるのは正しいのですが、ここで誤って $\frac{1}{-\sin x}$ を積分の外に出してしまうとこの誤答となります。

[3] 部分積分法で正解を得た人もありましたが冗長な解答になります。置換積分による解法をまず理解して下さい。

[4] $\sqrt{1+x^2} = t + x$ とおいて置換積分した人の答は皆、$I = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})} + C$

となっていました。これも正解ですが、変形して解答の形に直すのが望ましいです。

[11] この試験で一番大切な問題だと思います。よく復習しておいて下さい。

[13] $\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2}$ と部分分数分解できますが、

$\frac{1}{t(t+1)(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+1}$ とは分解できません。$B' = B + C$ と書くと、

右辺は $\frac{A}{t} + \frac{B'}{t+1}$ と同じで、未知数の数が足りません。正しくは

$\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$ とおきます。$\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{(t+1)^2}$ とおいても間違いではありませんが、

積分しにくいという欠点があります。

[14] $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ なので $I = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$ も正解です。

$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}$ と変形すると、この形の解になります。