情報・知能１年生 微分積分 II AB 共通 期末テスト問題 2006 年 2 月 7 日 1 限実施（田嶋 A, 保倉 B）

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。

答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 次の重積分を計算せよ．ただし, a は, 正の定数とする．

(1) $$\int\int_D (3x-y)\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}.$$

(2) $$\int\int_D x^2\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

【2】 つぎの積分を累次積分の順序を変えて, 2 通りに計算せよ．

$$\int\int_D x^3y\,dxdy, \quad D: \text{直線 } y=x,\ \text{直線 } x=1,\ x \text{ 軸に囲まれた領域}.$$

【3】 次の積分の値を計算せよ．ただし, a は正の定数とする．

(1) $$\int\int_D (x+y)^2\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\ |x+y|\le 1,\ |x-y|\le 1\}.$$

(2) $$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le a^2\}.$$

【4】 以下に示した等式 (1),(2) が任意の $f(x,y)$ に対して成り立つように $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{シ}}$ に適切な数式を入れよ。

(1) $$\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} f(x,y)dy = \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{ア}}} dy\int_{\boxed{\text{エ}}}^{\boxed{\text{ウ}}} f(x,y)dx.$$

(2) $$\int_0^1 dy\int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x,y)\,dx = \int_{\boxed{\text{カ}}}^{\boxed{\text{オ}}} dx\int_{\boxed{\text{ク}}}^{\boxed{\text{キ}}} f(x,y)dy + \int_{\boxed{\text{コ}}}^{\boxed{\text{ケ}}} dx\int_{\boxed{\text{シ}}}^{\boxed{\text{サ}}} f(x,y)dy.$$

【5】 正の数 a に対して, 領域 $D(a)$, $E(a)$ を

$$D(a)=\{(x,y)|\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\},$$
$$E(a)=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le a^2,\ 0\le x,\ 0\le y\}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int\int_{D(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2$ であることを示せ．

(2) 極座標へ変数変換することにより $\displaystyle\int\int_{E(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(3) (1), (2) の結果を用いて $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

【6】 重積分を使って半径が a の球の体積が $\dfrac{4\pi}{3}a^3$ であることを示せ。ただし, a は正の定数とする．

福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分 II　A クラス (田嶋教員)　B クラス (保倉教員)

定期試験 答案用紙　2006 年 2 月 7 日 1 限実施

【1】(1)
10 点

【1】(2)
10 点

【2】
15 点

【3】(1)
10 点

【3】(2)
10 点

【4】
15 点

ア	ウ	オ	キ	ケ	サ
イ	エ	カ	ク	コ	シ

【5】
20 点

【6】は裏面に解答せよ.(10 点)

学科　　学籍番号　　氏名　　得点

2006年度後期 微分積分Ⅱ 定期試験 解答・解説

[1](1) $I = \iint_D (3x-y)\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid 0\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 2\}$

$$I = \int_0^2 dx \int_1^2 dy\ (3x-y) = \int_0^2 dx \left[3xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= \int_0^2 dx\left(6x-2-3x+\frac{1}{2}\right) = \int_0^2 \left(3x-\frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= 6-3 = 3 \quad \text{(答)}$$

(別解)

$$I = 3\left\{\int_0^2 x\,dx\right\}\left\{\int_1^2 dy\right\} - \left\{\int_0^2 dx\right\}\left\{\int_1^2 y\,dy\right\}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}(2^2-0^2)\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1^2)$$

$$= 3\cdot 2 - 2\cdot\frac{3}{2} = 6-3 = 3$$

[1](2)

$I = \iint_D x^2$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y \geqq 0\}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\cdot x^2 = \int_0^1 x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここまでで7点。しかし不定積分が求まらない。

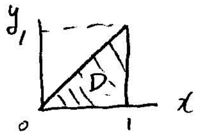
そこで、極座標で計算してみると、

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a dr\cdot \overset{\text{ヤコビアン}}{r}\cdot r^2\cos^2\theta = \left\{\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^a r^3\,dr\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi}{16}a^4 \quad \text{(答)}$$

ヤコビアンを忘れると $\frac{\pi}{12}a^3$ になる(8点)

[2] $I = \iint_D x^3y\,dxdy$



① $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy\ x^3y = \int_0^1 dx\ x^3\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 \frac{1}{2}x^5\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad \text{(答)}$$

② $I = \int_0^1 dy \int_y^1 dx\ x^3y = \int_0^1 dy\ y\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=y}^{x=1}$

$$= \int_0^1 dy\cdot y\cdot\frac{1}{4}(1-y^4) = \frac{1}{4}\int_0^1 (y-y^5)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^6\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{(答)}$$

[3](1) $I=\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$, $D=\{(x,y) \mid |x+y|\le 1,\ |x-y|\le 1\}$

$\left.\begin{array}{l} u=x+y \\ v=x-y \end{array}\right\}$ とおくと $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = 2$, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \dfrac{1}{2}$

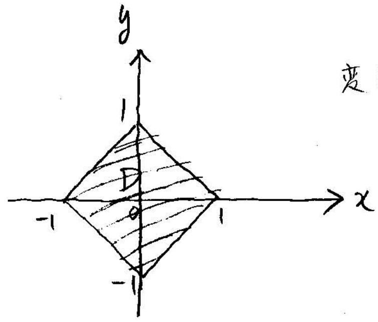
行列式の絶対値

$$I = \iint_{D'} u^2 \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \quad , \quad D'=\{(u,v) \mid |u|\le 1,\ |v|\le 1\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv\ u^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=-1}^{u=1}\left[v\right]_{v=-1}^{v=1} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,2 = \frac{2}{3}$$

(別解)



変数変換せずに積分を実行してみる。

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} dy\,(x+y)^2 + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{-x+1} dy\,(x+y)^2$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=-x-1}^{y=x+1} + \int_{0}^{1} dx \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=x-1}^{y=-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} dx \left\{(2x+1)^3-(-1)^3\right\} + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} dx \left\{1^3-(2x-1)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{x=-1}^{x=0} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(2x-1)^4\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{24}\left(1-(-1)^4\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{24}\left(1^4-(-1)^4\right)$$

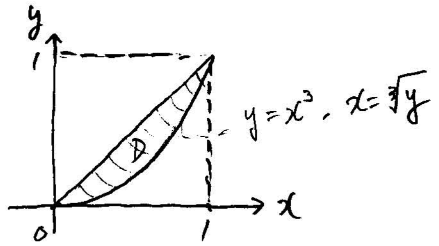
$$= \frac{2}{3}$$

[3] (2) $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ とおくと $dxdy = r\,dr\,d\theta$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr \cdot r = [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=a} = 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi}{3}a^3$$

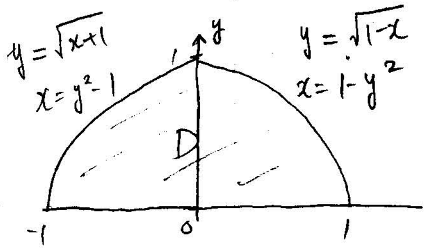
[4] (1) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$



ア 1　ウ $\sqrt[3]{y}$　オ 0　キ $\sqrt{1+x}$　ケ 1　サ $\sqrt{1-x}$

イ 0　エ y　カ -1　ク 0　コ 0　シ 0

(2) $\int_0^1 dy \int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1+x}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy$



[5] (1) $\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^a dx \int_0^a dy\, e^{-x^2}e^{-y^2} = \left\{\int_0^a e^{-x^2}dx\right\}\left\{\int_0^a e^{-y^2}dy\right\}$

$$= \left\{\int_0^a e^{-x^2}dx\right\}^2$$

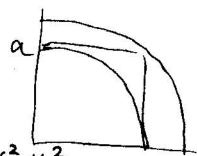
(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと. $dxdy = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_{E(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r\,dr\, e^{-r^2}$$

$$= [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-a^2}) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

(3) $\lim_{a\to\infty} \iint_{E(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) = \frac{\pi}{4}$

$E(a) \subset D(a) \subset E(\sqrt{2}a)$, $e^{-x^2-y^2} > 0$ より



$$\iint_{E(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy < \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy < \iint_{E(\sqrt{2}a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

$a\to\infty$ の極限をとると.

$$\frac{\pi}{4} \le \lim_{a\to\infty} \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \frac{\pi}{4}$$

$\therefore \lim_{a\to\infty} \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} = \left\{\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx\right\}^2$ $\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

[6] 半径 a の球の体積 V は

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz, \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$$ とおくと $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=a} \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ &= \frac{a^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}a^3 \end{aligned}$$

[別解] 高さ z を二重積分して求める

$$V = 2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$$

2次元極座標で表すと

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \overset{\text{ヤコビアン}}{r}\,dr\sqrt{a^2-r^2} \\ &= 2\cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=a} \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{3}a^3 \\ &= \frac{4\pi}{3}a^3 \end{aligned}$$

なお、断面積を一重積分して求めることもできるが、これは重積分ではないので1点しか与えなかった。

【全般的注意】

[2] $\int_0^1 dx \int_0^x dy \cdots$ をサンドイッチ型に表すと $\int_0^1 \int_0^x \cdots dy\,dx$ となるが

これを $\int_0^1 \int_0^x \cdots\cdots dx\,dy$ のような順に書く間違いが散見された。

[3] r の積分区間を $\int_0^a dr$ でなく $\int_{-a}^a dr$ とした間違いが多く見られた。

[5] $\int e^{-x^2}dx \overset{(誤)}{=} \frac{1}{2x}e^{-x^2} + C$ とした人が極めて多かった(4人に1人くらいか)。

微分して確認すれば間違いであることは容易にわかります。