情報・知能１年生 微分積分 II A クラス 中間試験問題 2005 年 12 月 13 日 1 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。
答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 $I = \int \sin^5 x \cos x dx$ を求めよ。

【2】 $I = \int x \log x \, dx$ を求めよ。

【3】 $I = \int \frac{3}{2x^2+1} dx$ を求めよ。

【4】 以下の広義積分 (1)〜(5) が収束する (有限の値をもつ) 場合は○を、発散する (値が±無限大となる) 場合は×を解答欄に記せ。

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$　(2) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$　(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$　(5) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

【5】 不定積分 $I = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ を求めよ.

【6】 不定積分 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。　【ヒント】 $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおいて置換積分してみよ。

【7】 $f(x)$ が連続であるとき、以下の式で定義される関数 $F(x)$ を f を用いて表せ。

$$F(x) = \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} t^2 f(t^3) dt$$

【8】 曲線　$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$　の　$0 \leq x \leq 1$　に対応する部分の長さ l を求めよ。

福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分 II A クラス 中間試験 答案用紙

2005 年 12 月 13 日 1 限実施

【1】
10 点

【2】
10 点

【3】
10 点

【4】
10 点

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【5】
15 点

【6】
15 点

【7】
15 点

【8】は裏面に解答せよ.(15 点)

学科

学籍番号

氏名

得点

2005年度後期 情報・知能 微分積分II(A) 中間試験 解答

[1] 10点

$$I=\int \sin^5 x\cos x\,dx=\int \sin^5 x\,(\sin x)'dx=\int \sin^5 x\,d(\sin x)=\frac{1}{6}\sin^6 x+C$$

㊟ [1]〜[3]は、計算過程が示されていなければ、完全な正答に10点、そうでなければ0点とした。

[2] 10点

$$I=\int x\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C$$

[3] 10点

$$I=\int\frac{3}{2x^2+1}dx=\frac{3}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2+1}=\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+C$$

[4] 10点

(1) ✕　(2) ○　(3) ○　(4) ○　(5) ✕　(教科書 p.92 の 2(2)〜(6) です)

㊟ 正解数 × 2点 で10点満点。

[5] 15点

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$ と書ける。(ここまでで5点)

両辺に $x-1$ をかけてから $x=1$ を代入すると、$A=\frac{1}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}$

両辺に $x-2$ をかけてから $x=2$ を代入すると、$B=\frac{1}{(2-1)(2-3)}=-1$

両辺に $x-3$ をかけてから $x=3$ を代入すると $C=\frac{1}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}$

$$\therefore I=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\log|x-1|-\log|x-2|+\frac{1}{2}\log|x-3|+C=\frac{1}{2}\log\frac{|(x-1)(x-3)|}{(x-2)^2}+C$$

㊟ 絶対値記号を忘れたら −1点。

[6] 15点

$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと、$t-x=\sqrt{x^2+1}$, $(t-x)^2=x^2+1$,

$t^2-2tx+x^2=x^2+1$, $2tx=t^2-1$, $\therefore x=\frac{t^2-1}{2t}$ --- 3点

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(t^2-1)'2t-(t^2-1)(2t)'}{(2t)^2}=\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2}=\frac{t^2+1}{2t^2}$$ --- 3点

また $\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$ --- 3点

$$\therefore I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\frac{dx}{dt}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$$ (Cは積分定数)

㊟ $-\infty<x<\infty$ に対し $x+\sqrt{x^2+1}>0$ なので $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ も正解。

[7] 15点

$G(x)=\int x^2f(x^3)dx$ とおくと、$G'(x)=x^2f(x^3)$ (ここまでで5点)

$$F(x)=\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}t^2f(t^3)\,dt=\frac{d}{dx}\{G(x^2)-G(x)\}$$ (ここまでで10点)

$$=G'(x^2)(x^2)'-G'(x)=(x^2)^2f((x^2)^3)\cdot 2x-x^2f(x^3)$$

$$=2x^5f(x^6)-x^2f(x^3)$$

㊟ 最終的な答のみを書いた答案は、完全に正解なら10点、それ以下は0点とした。

[8]
15点

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx \left(\because \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e} + e^0 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$