情報・知能１年生 微分積分 II A・B クラス共通 中間テスト問題 2004 年 12 月 14 日 1 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。
答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 下記の小問 1) 〜 8) の不定積分を求め，解答欄に答のみを記入せよ．積分定数は省略してよい．

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$　　2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$　　3) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$　　4) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \sin^2 x\ \cos x\,dx$　　6) $\displaystyle\int \tan x\,dx$　　7) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　　8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

【2】 不定積分 $I = \displaystyle\int x^2(x^3+1)^{7/3}\,dx$ を求めよ． $t = x^3+1$ とおいて置換積分するとよい．

【3】 不定積分 $I = \displaystyle\int x\,\mathrm{arctan}x\,dx$ を求めよ．部分積分法を使うとよい．

【4】 $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} e^{-t^2}\,dt$ と定義する．このとき $F'(x)$ を求めよ．

【5】 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ の値を求めよ．

【6】 $f(x) = \dfrac{12}{1-2x-35x^2}$ について，下記の小問 1), 2) に答えよ．

1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

2) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} f(x)\,dx$ の値を求めよ．

福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分II A・B共通 中間試験 答案用紙

2004年12月14日1限実施

【1】 40点

1)	2)	3)	4)
5)	6)	7)	8)

【2】 10点

【4】 10点

【5】 10点

【3】 10点

【6】は裏面に解答せよ。(20点)

学科		学籍番号									氏名		得点	

【1】 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$

⊙ √記号を使わずにベキ乗を使って書き表したほうが積分は間違えにくいでしょう.

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C.$

⊙ 基本的な関数の積分公式そのものですから記憶しておく必要があります. 忘れていた人は、丸暗記ではまたすぐに忘れてしまうでしょうから、導き方 (指数関数の微分公式 $(e^x)' = e^x$ および逆関数の微分公式 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$ から導くのが普通) から勉強しなおすことを勧めます。

3) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx = \int (x+1)'\log(x+1)dx = (x+1)\log(x+1) - \int (x+1)\left\{\log(x+1)\right\}'dx$
$\displaystyle= (x+1)\log(x+1) - \int (x+1)\frac{1}{x+1}dx = (x+1)\log(x+1) - \int dx = (x+1)\log(x+1) - x + C.$

⊙ あるいは $\displaystyle\int \log x = x\log x - x + C$ を公式として覚えておき, 変数の置換 $t = x+1$ をして, $dt = dx$ なので $\displaystyle\int \log(x+1)dx = \int \log t dt = t\log t - t + C = (x+1)\log(x+1) - (x+1) + C$ $= (x+1)\log(x+1) - x + C'$ とするのもよいでしょう.

4) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} + C.$

⊙ 変数変換 $t = \dfrac{x}{2}$ で既知の積分 $\displaystyle\int \cos t dt = \sin t + C$ に帰着させます.

5) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \int \sin^2 x\,(\sin x)'\,dx = \int \sin^2 x\,d\,(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

⊙ 変数変換 $t = \sin x$ で既知の積分 $\displaystyle\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$ に帰着させます.

6) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-(\cos x)'dx}{\cos x} = -\int \frac{d\,(\cos x)}{\cos x} = -\log|\cos x| + C.$

⊙ 変数変換 $t = \cos x$ で既知の積分 $\displaystyle\int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$ に帰着させます.

7) $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -\int x\,(\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int x'\cos x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

⊙ 部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ を利用します.

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\sqrt{3}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

⊙ 変数変換 $t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ で既知の積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + C$ に帰着させます.

【2】 $\boxed{問}$ $I=\displaystyle\int x^2(x^3+1)^{7/3}\,dx$ を求めよ.

$t=x^3+1$ とおくと $dt=3x^2dx$. $\therefore\ I=\displaystyle\int \left(x^3+1\right)^{7/3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3x^2dx=\int t^{7/3}\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{7}{3}+1}\cdot t^{\frac{7}{3}+1}+C$
$=\dfrac{1}{10}t^{10/3}+C=\dfrac{1}{10}(x^3+1)^{10/3}+C$ (C は積分定数).

【3】 $\boxed{問}$ $I=\displaystyle\int x\,\mathrm{arctan}x\,dx$ を求めよ.

部分積分法を用いると $I=\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\mathrm{arctan}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctan}x-\int\frac{1}{2}x^2\ (\arctan x)'\,dx$
$=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{arctan}x-\displaystyle\int\frac{1}{2}x^2\,\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctan}x-\frac{1}{2}\int\left\{(1+x^2)-1\right\}\frac{1}{1+x^2}dx$
$=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{arctan}x-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctan}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C=\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{arctan}x-\frac{1}{2}x+C.$

【4】 $\boxed{問}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^{2x}e^{-t^2}\,dt$ と定義する. このとき $F'(x)$ を求めよ.

$f(x)=\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ とすると $f'(x)=e^{-x^2}$, $F(x)=f(2x)-f(0)$.
$\therefore F'(x)=\dfrac{d}{dx}f(2x)-\dfrac{d}{dx}f(0)=\dfrac{df(2x)}{d(2x)}\dfrac{d(2x)}{dx}-\dfrac{d(\text{定数})}{dx}=f'(2x)\cdot 2-0=2f'(2x)=2e^{-(2x)^2}=2e^{-4x^2}.$

【5】 $\boxed{問}$ $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ の値を求めよ.

$t=\sqrt{x}$ とおくと $x=t^2$, $dx=2tdt$. また $0<x<\infty$ は $0<t<\infty$ に対応する.
$\therefore I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{2tdt}{t(1+t^2)}=2\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=2\left[\arctan t\right]_0^\infty=2\arctan(\infty)-2\arctan(0)=2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot 0=\pi.$

【6】 $\boxed{問}$ $f(x)=\dfrac{12}{1-2x-35x^2}$ について, 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ および広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ.

$f(x)=\dfrac{12}{(1+5x)(1-7x)}=\dfrac{A}{1+5x}+\dfrac{B}{1-7x}$ (A,B は定数) の形に部分分数分解できる.
$12=A(1-7x)+B(1+5x)=(A+B)+(5B-7A)x$ $\therefore$ $A+B=12,-7A+5B=0$ $\therefore$ $A=5,B=7.$
$\therefore F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{5}{1+5x}dx+\int\frac{7}{1-7x}dx=5\log|1+5x|\cdot\frac{1}{5}+7\log|1-7x|\cdot\frac{1}{-7}+C$
$=\log|1+5x|-\log|1-7x|+C=\log\left|\dfrac{1+5x}{1-7x}\right|+C=\log\left|\dfrac{5x+1}{7x-1}\right|+C.$
$f(x)$ は $x=-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7}$ で発散するが, この 2 点を除けば連続である. よって積分区間 $[3,\infty)$ で $f(x)$ は連続であるから, 微積分学の基本定理により $I=F(\infty)-F(3)$. 以下では 積分定数 を $C=0$ ととることにする.
$F(\infty)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left|\frac{5x+1}{7x-1}\right|=\lim_{x\to\infty}\log\left|\frac{5+\frac{1}{x}}{7-\frac{1}{x}}\right|=\log\frac{5}{7}.$
$F(3)=\log\left|\dfrac{15+1}{21-1}\right|=\log\dfrac{16}{20}=\log\dfrac{4}{5}.$
$I=F(\infty)-F(3)=\log\dfrac{5}{7}-\log\dfrac{4}{5}=\log\left(\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{5}{4}\right)=\log\dfrac{25}{28}.$