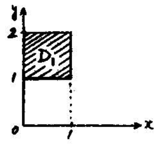
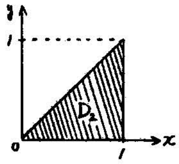
情報・知能１年生 微分積分 II A・B クラス共通 定期試験問題 2004年2月3日1限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用) を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙は持ち帰れ。

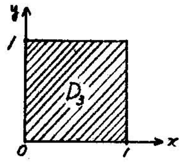
【１】 重積分 $I_1 = \iint_{D_1} x^2y^3\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_1 は右図で斜線を施した領域である.



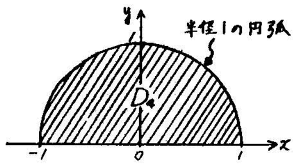
【２】 重積分 $I_2 = \iint_{D_2} x^2y\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_2 は右図で斜線を施した領域である.



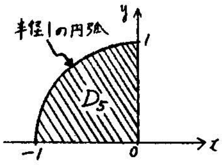
【３】 重積分 $I_3 = \iint_{D_3} \sqrt{x+y}\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_3 は右図で斜線を施した領域である.



【４】 重積分 $I_4 = \iint_{D_4} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_4 は右図で斜線を施した領域である.



【５】 重積分 $I_5 = \iint_{D_5} x^2\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_5 は右図で斜線を施した領域である.

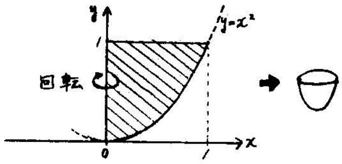


【６】 下記の等式 (1),(2) が成り立つように $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ を埋めよ。答案用紙の解答欄に答のみを記せ。

(1) $\displaystyle \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy = \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{ア}}} dy \int_{\boxed{\text{エ}}}^{\boxed{\text{ウ}}} f(x,y)\,dx$

(2) $\displaystyle \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^0 dx \int_{\boxed{\text{カ}}}^{\boxed{\text{オ}}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{\boxed{\text{ク}}}^{\boxed{\text{キ}}} f(x,y)dy$

【７】 ２直線 $x=0,\ y=1$ と曲線 $y=x^2$ に囲まれた図形を y 軸のまわりに一回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ.

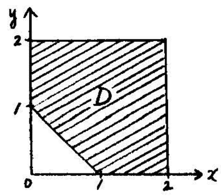


【８】 $z \geq 0,\ z \leq 1-x^2,\ z \leq 1-y^2$ を満たす３次元領域について下記の問 (1),(2) に答えよ.

(1) この３次元領域の，平面 $z=z_0$ での断面の面積 $S(z_0)$ を求めよ．ただし，$0 \leq z_0 \leq 1$ とする.

(2) この３次元領域の体積 V を求めよ.

【９】 重積分 $I = \iint_D \dfrac{y}{x+1}\,dxdy$ の値を求めよ。
ただし D は右図で斜線を施した領域である.



【1】 10点

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_1^2 dy\ x^2 y^3 \quad \uparrow 5点$$

$$= \left\{\int_0^1 x^2\,dx\right\}\left\{\int_1^2 y^3\,dy\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{1}{4}y^4\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= \frac{1}{3}(1-0)\cdot\frac{1}{4}(16-1)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{4} = \frac{5}{4} \qquad \therefore I_1 = \frac{5}{4}$$

【2】 10点

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^x dy\ x^2 y \quad \uparrow 5点$$

$$= \int_0^1 dx \cdot x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=x}$$

$$= \int_0^1 dx\ \frac{1}{2}x^4 = \left[\frac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{10} \qquad \therefore I_2 = \frac{1}{10}$$

(別解) $I_2 = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \cdot x^2 y \quad \uparrow 5点$

$$= \int_0^1 dy \cdot y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 dy\ \frac{y}{3}(1-y^3)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

【3】 10点

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\ (x+y)^{1/2} \quad \uparrow 3点$$

$$= \int_0^1 dx\ \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_0^1 dx\ \frac{2}{3}\cdot\left\{(x+1)^{3/2} - x^{3/2}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(2^{5/2} - 1 - 1 + 0\right)$$

$$= \frac{4}{15}\left(2^{5/2} - 2\right) = \frac{8}{15}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \qquad \therefore I_3 = \frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

(別解) $\int_0^1 dy \int_0^1 dx\ (x+y)^{1/2}$ としても、上の導出で x と y が入れ替わるだけ。

＊「$2^{5/2} - 2 \overset{(誤)}{=} 2^{3/2}$」という間違いをした人がいました。

【4】 10点 (積分変数を極座標に変換すると $\sqrt{x^2+y^2} = r$ であるから)

$$I_4 = \underbrace{\int_0^1}_{2点} dr \cdot \underbrace{r}_{ヤコビアン\ 2点} \underbrace{\int_0^\pi}_{2点} d\theta \cdot \underbrace{r}_{\sqrt{x^2+y^2}=r\ 2点} \quad \uparrow 8点$$

$$= \left\{\int_0^1 r^2\,dr\right\}\left\{\int_0^\pi d\theta\right\} = \frac{1}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{3} \qquad \therefore I_4 = \frac{\pi}{3}$$

【5】 10点 (積分変数を極座標に変換すると)

$$I_5 = \underbrace{\int_0^1}_{1点} dr \cdot \underbrace{r}_{ヤコビアン\ 1点} \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}}_{1点} \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{2点} \quad \uparrow 5点$$

$$= \left\{\int_0^1 r^3\,dr\right\}\cdot\left\{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} \qquad \therefore I_5 = \frac{\pi}{16}$$

【6】 15点 2点×8、15点まで

ア 1	イ 0	ウ y	エ 0
オ $1+x$	カ 0	キ $1-x$	ク 0

【7】 10点

$$V = \pi \int_0^1 x^2\,dy \quad \uparrow 5点$$

抜ければ−2点

$$= \pi \int_0^1 y\,dy \quad \uparrow 8点$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad \therefore V = \frac{\pi}{2}$$

(誤答) $V = \pi \int_0^1 y^2\,dx \quad \uparrow 3点$ 　抜ければ−1点

$$= \pi \int_0^1 x^4\,dx \quad \uparrow 4点$$

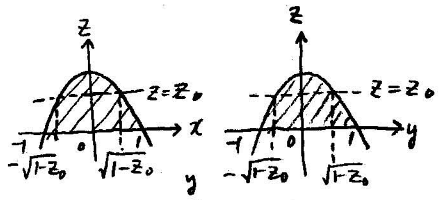
$$= \frac{\pi}{5} \quad \uparrow 5点$$

【学科】	【番号】	【氏名】

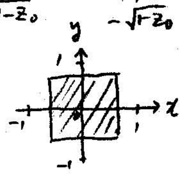
【得点】	1	2	3	4	5	6	7	総合

【8】
10点

(1) 5点



$z=z_0$ 断面は



即ち $-\sqrt{1-z_0} \leq x \leq \sqrt{1-z_0}$
$-\sqrt{1-z_0} \leq y \leq \sqrt{1-z_0}$

$\therefore S(z_0) = 2\sqrt{1-z_0} \times 2\sqrt{1-z_0} = 4(1-z_0)$

$\therefore S(z_0) = 4(1-z_0)$

(2) ← 5点

$$V = \int_0^1 S(z)\,dz$$
$$= \int_0^1 4(1-z)\,dz$$
$$= 4\left[z - \frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1}$$
$$= 4\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$\therefore V = 2$

【9】
15点

$$I = \underbrace{\int_0^1 dx \int_{1-x}^2 dy\, \frac{y}{x+1}}_{I_A} + \underbrace{\int_1^2 dx \int_0^2 dy\, \frac{y}{x+1}}_{I_B}$$

…↑5点

$$I_A = \int_0^1 dx\, \frac{1}{x+1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1-x}^{y=2}$$
$$= \int_0^1 dx\, \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2}\left\{4-(1-x)^2\right\}$$
$$= \int_0^1 dx\, \frac{-x^2+2x+3}{2(x+1)}$$
$$= \int_0^1 \frac{(x+1)(-x+3)}{2(x+1)}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{-x+3}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+3\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

…↑10点

$$I_B = \left\{\int_1^2 \frac{dx}{x+1}\right\}\left\{\int_0^2 y\,dy\right\}$$
$$= \left[\log(x+1)\right]_{x=1}^{x=2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}$$
$$= (\log 3 - \log 2)\cdot\frac{1}{2}(4-0)$$

← $2\log 3 - 2\log 2 \overset{(誤)}{=} \dfrac{\log 3}{\log 2}$ という間違いをした人がいました

$$= 2\log\frac{3}{2}$$

…↑15点

$$\therefore I = I_A + I_B$$
$$= \frac{5}{4} + 2\log\frac{3}{2}$$

(別解) $I = \underbrace{\int_0^2 dx \int_0^2 dy\, \frac{y}{x+1}}_{I_C} - \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{y}{x+1}}_{I_D}$

$I_C = \cdots = 2\log 3$, $\quad I_D = 2\log 2 - \frac{5}{4}$

$\therefore I = I_C - I_D = 2\log\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$

(別解)' $I = \underbrace{\int_0^1 dy \int_{1-y}^2 dx\, \frac{y}{x+1}}_{I_E} + \underbrace{\int_1^2 dy \int_0^2 dx\, \frac{y}{x+1}}_{I_F}$

$I_E = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\log 3 - 2\log 2$, $\quad I_F = \frac{3}{2}\log 3$

$\therefore I = I_E + I_F = \frac{5}{4} + 2\log 3 - 2\log 2 = \frac{5}{4} + 2\log\frac{3}{2}$

学科	番号	氏名	得点	8	9