情報・知能１年生 微分積分 II (A) 中間テスト問題 2003 年 12 月 9 日 1 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。
答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 下記の小問 1) 〜 6) の不定積分を求め，解答欄に答のみを記入せよ．積分定数は省略してよい．

1) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\,dx$　　2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$　　3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5}$　　5) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　6) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

【2】 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$ を求めよ．

【3】 不定積分 $I = \displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ．

【4】 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ を求めよ．ただし α は正の実数の定数である．

【ヒント】 α の値による場合分けが必要である．

【5】 $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{x-t^2}\,dt,\quad G(x) = \frac{dF(x)}{dx} - F(x)$ とする．$G(x)$ を求めよ．

【6】 $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，下記の小問 1) 〜 3) に答えよ．

1) 部分積分法を適用すると，

$$I_n = \int x' \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = x\frac{1}{(x^2+1)^n} - \int x\frac{\boxed{\text{※}}}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

となる． $\boxed{\text{※}}$ に当てはまる式を解答用紙の解答欄に記入せよ．

2) 上式を利用して I_{n+1} を I_n を用いて表す漸化式を作れ．

【ヒント】 $\displaystyle\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$

3) 上で求めた漸化式を用いて I_3 を求めると，$I_3 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}x^3 + \boxed{\text{イ}}x}{\boxed{\text{ウ}}(x^2+1)^2} + \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{ウ}}}\arctan x + C$

となる． $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる数字を解答用紙の解答欄に記入せよ．

福井大・工・情報・知能 1年生 微分積分II(A) 中間試験 解答用紙 03/12/9実施 (P.1/2)

[1]
8点×6問
=48点

1)		2)		3)	
4)		5)		6)	

[2]
10点

[3]
10点

学科		番号		氏名		得点	

100点満点

[4]
10点

[5]
10点

[6]

4点 1)

3点

3)		
ア	イ	ウ

2)
5点

学科		番号		氏名	

情報・知能一年生　微分積分II (A) 中間試験 (03/12/9実施) の解答

[1] 1) $-2\cos\frac{x}{2}$　2) $\tan x$　3) $\arcsin x$　4) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}$

5) $x\log x - x$　6) $(x^2-2x+2)e^x$

☆ 結果を微分して、被積分関数に一致することを確かめれば計算ミスはほとんど防げる。

☆ 2), 3), 4) は微分公式 $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ を覚えているという前提で出題しました。4) は $\int\frac{dx}{x^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\frac{x}{\sqrt{5}})}{(\frac{x}{\sqrt{5}})^2+1}$ であることより $t=\frac{x}{\sqrt{5}}$ と置換すれば $\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t$ に帰着します。

☆ 5), 6) は部分積分法で求めます。

☆ $\arcsin x$ を $\sin^{-1}x$, $\arctan x$ を $\tan^{-1}x$ と書くのは $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\tan x}$ と混同のおそれがあるので避けるべきだと私は思います。(減点はしませんが。)

[2] $\frac{x^2-1}{x^3+x}=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと

$$x^2-1=A(x^2+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+A$$ 係数を比較して、

$\therefore$ $A+B=1$, $C=0$, $A=-1$　$\therefore$ $B=1-A=2$

$$\therefore I=\int\frac{x^2-1}{x^3+x}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=-\log|x|+\log(x^2+1)+C=\log\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C$$

($\because$ $t=x^2$ とおくと $dt=2x\,dx$ よって $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{dt}{t+1}=\log|t+1|=\log|x^2+1|$)

[3] $t=1-x^2$ とおくと、$dt=-2x\,dx$

$$I=\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{1-x^2}\,(-2x)dx=-\frac{1}{2}\int(1-t)\sqrt{t}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int(t^{1/2}-t^{3/2})dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-\frac{2}{5}t^{5/2}\right)+C$$
$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}+C=-\frac{1}{15}(1-x^2)^{3/2}(3x^2+2)+C$$

[3] 別解　$\sqrt{\ }$ の中が負でないために $-1\leq x\leq 1$　$\therefore$ $x=\sin t$ $(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ とおける

このとき $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t$,　$dx=\cos t\,dt$

$$\therefore I=\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sin^3 t\cos^2 t\,dt=\int\sin^2 t\cos^2 t\sin t\,dt$$
$$=-\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,d(\cos t)=-\frac{1}{3}\cos^3 t+\frac{1}{5}\cos^5 t+C$$
$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}+C$$

(「$u=\cos t$ とおくと $du=-\sin t\,dt$」を上では「$\sin t\,dt=-d(\cos t)$」と略記した。)

[4] $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx$ （$\alpha > 0$は定数）

$\alpha \neq 1$のとき $I = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & : 1-\alpha > 0 \text{ 即ち } \alpha < 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{1-\alpha} \cdot (-\infty) = +\infty & (1-\alpha < 0 \text{ 即ち } \alpha > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$\alpha = 1$のとき $I = \lim_{\varepsilon \to +0} [\log x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} (-\log \varepsilon) = -(-\infty) = +\infty$

$\therefore$ $0 < \alpha < 1$のとき $I = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha \geqq 1$のとき $I = +\infty$

[5] $F(x) = \int_0^{x^2} e^{x-t^2} dt = e^x \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$

$H(t) = \int e^{-t^2} dt$ とすると. $H'(t) = e^{-t^2}$

$F(x) = e^x \{H(x^2) - H(0)\}$, $F'(x) = e^x \{H(x^2) - H(0)\} + e^x H'(x^2) \cdot 2x$

$= F(x) + e^x \cdot e^{-x^4} \cdot 2x$ $\therefore G(x) = F'(x) - F(x) = 2xe^{x-x^4}$

☆ 教科書 p.146、問4の類題です。

[6] 1) $-2nx$ 3) ア…3, イ…5, ウ…8

2) 1)の結果より $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$

ヒントの変形を利用すると. $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$\therefore$ $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$

$2n I_{n+1} = (2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2+1)^n}$

$\therefore$ $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n}$

[付録] 答案にあった誤った不定積分の例（まちがっているとはっきりわかりますか？）

誤 $\int \sin^n x \, dx = -\cos^n x$ （$n=1$のときだけ正しい）

誤 $\int \sin^n x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \cdot \frac{1}{\cos x}$ （この人はどういうつもりで$\cos x$で割ればよいと思ったか想像してみましょう）

誤 $\int (x^6 - x^8)^{1/2} dx = \frac{2}{3} (x^6 - x^8)^{3/2} \cdot \frac{1}{6x^5 - 8x^7}$