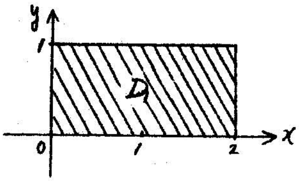
微分積分 II 定期試験問題兼解答用紙 (情報・知能工学科 A・B クラス共通 2003 年 2 月 4 日 1 限実施)

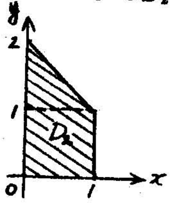
学科	平成 年入学	氏名	学籍番号

【1】 下記の小問 (1),(2) の二重積分 I_1, I_2 を求めよ。ただし D_1, D_2 は図中で斜線を施した領域である。

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} (x-y)\,dxdy$



(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} xy\,dxdy$



【2】 下記の等式 (1),(2) がなりたつように $\boxed{ア}$〜$\boxed{オ}$ を埋めよ。解答欄に答のみ記せ。

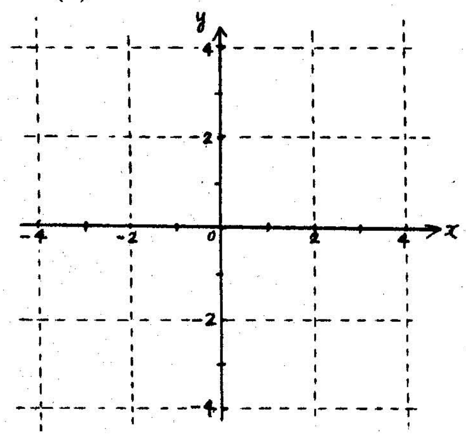
(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} f(x,y)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^{y} f(x,y)\,dx = \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} dx \int_{|x|}^{\boxed{オ}} f(x,y)\,dx$

解答欄	ア	イ	ウ	エ	オ

【3】 極座標表示された曲線 $r = 2 + \sin 2\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について下記の問に答えよ。

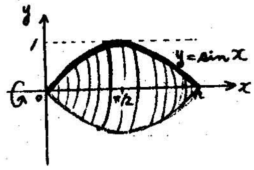
(1) この曲線の概形を描け。



(2) この曲線の囲む領域を D とするとき、二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を求めよ。なお D には被積分関数が発散する点が含まれるので求める積分は広義積分となるが、その収束は厳密には証明しなくてよい。

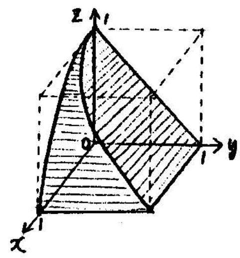
学科	平成　　年入学	氏名	学籍番号

【4】 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる図形の体積 V を求めよ。



【5】

4 つの平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 - y$ および曲面 $z = 1 - x^2$ に囲まれた立体の体積 V を求めよ。



[1] (1) $I_1 = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(x-y) = \int_0^2 dx\,\left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1}$

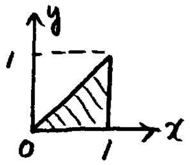
$= \int_0^2 dx\,(x-\frac{1}{2}) = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{2}{2} = 1$

(2) $I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} dy\; xy = \int_0^1 dx\,\left[\frac{1}{2}x y^2\right]_{y=0}^{y=2-x}$

$= \int_0^1 dx\,\frac{1}{2}x(2-x)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(x^3 - 4x^2 + 4x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_{x=0}^{x=1}$

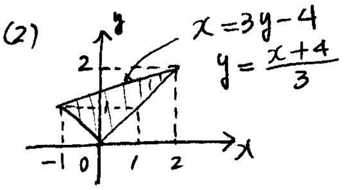
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right) = \frac{11}{24}$

[2] (1)



$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\boxed{y}}^{\boxed{1}} f(x,y)\,dx$

(2)

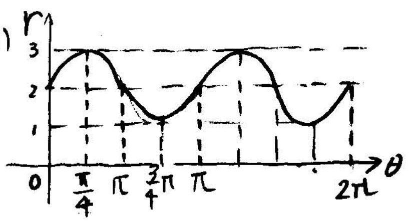


$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^{y} f(x,y)\,dx$

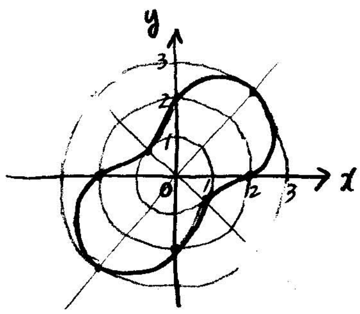
$= \int_{\boxed{-1}}^{\boxed{2}} dx \int_{|x|}^{\boxed{\frac{x+4}{3}}} f(x,y)\,dx$

答 $\boxed{ア}$ 1 $\boxed{イ}$ y $\boxed{ウ}$ 2 $\boxed{エ}$ -1 $\boxed{オ}$ $\frac{x+4}{3}$

[3] (1)



より



(2) $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2+\sin 2\theta} r\,dr \cdot \frac{1}{r}$

$= \int_0^{2\pi} d\theta\,\left[r\right]_{r=0}^{r=2+\sin 2\theta}$

$= \int_0^{2\pi} d\theta\,(2 + \sin 2\theta)$

$= \left[2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$

$= 4\pi$

又は $I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon}^{2+\sin 2\theta} r\,dr\,\frac{1}{r}$

$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} d\theta\,\left[r\right]_{r=\varepsilon}^{r=2+\sin 2\theta}$

$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} d\theta\,(2 + \varepsilon + \sin 2\theta)$

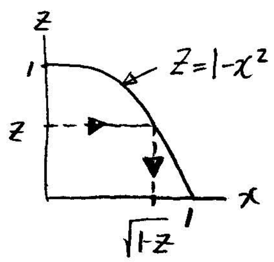
$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[(2+\varepsilon)\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$

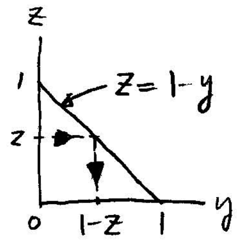
$= \lim_{\varepsilon \to +0} (4\pi + 2\pi\varepsilon)$

$= 4\pi$

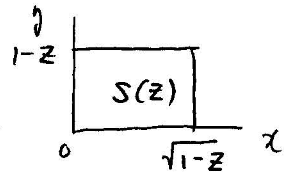
[4] $V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

[5]





∴ z 断面は

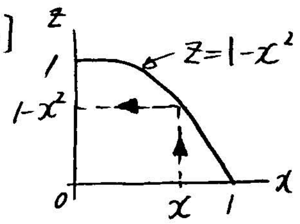


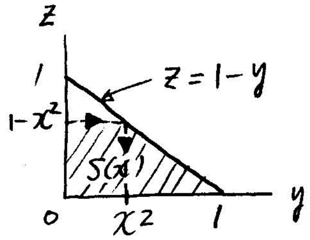
$S(z) = (1-z)\sqrt{1-z}$

$\therefore V = \int_0^1 S(z)\,dz = \int_0^1 (1-z)\sqrt{1-z}\,dz = \int_0^1 t^{3/2} dt$ （$t = 1-z$ とおいた）

$= \left[\frac{2}{5} t^{5/2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{5}$

[別解]





x 断面積は

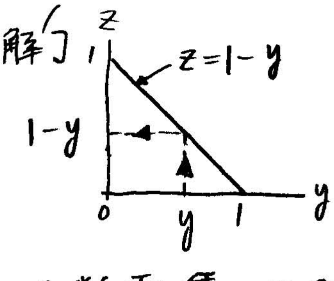
$S(x) = \frac{1+x^2}{2}(1-x^2)$

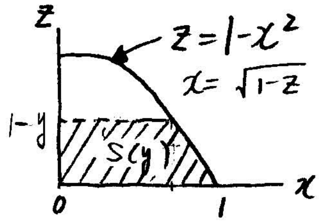
$= \frac{1}{2}(1-x^4)$

$\therefore V = \int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=1}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$

[別解′]





y 断面積 $S(y) = \int_0^{1-y} \sqrt{1-z}\,dz = \left[-\frac{2}{3}(1-z)^{3/2}\right]_{z=0}^{z=1-y}$

$= -\frac{2}{3} y^{3/2} + \frac{2}{3}$

$\therefore V = \int_0^1 S(y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-y^{3/2})\,dy = \frac{2}{3}\left[y - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$