情報・知能１年生 微分積分 II (B) 中間テスト問題 2002 年 11 月 26 日 1 限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科・学籍番号・氏名を明記せよ。

1. 不定積分 $I = \int x\, e^x\, dx$ を求めよ。 [10 点]

2. 不定積分 $I = \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ を求めよ。 [10 点]

3. 下記の (i)〜(iv) の広義積分を求めよ。もし積分値が発散するときは、その導出過程を記述した上で、∞ または $-\infty$ と答えよ。

(i) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2}$ [5 点]

(ii) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+2}$ [5 点]

(iii) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ [5 点]

(iv) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ [5 点]

4. 関数 $G(x)$ が、別の関数 $f(t)$ を用いて $G(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\, dt$ と定義されているとき、$G'(x) = \dfrac{dG(x)}{dx}$ を求めよ。 [20 点]

5. 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{5x-1}{x^3-x}\, dx$ を求めよ。 [20 点]

6. 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。 [20 点]

【ヒント】 $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおいて置換積分してみるとよい。

情報・知能1年生 微分積分IIB 中間試験('02/11/26実施)の解答

① $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = \underline{(x-1) e^x + C}$

② $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+1} + C = \underline{\sqrt{x^2+1} + C}$

($t = x^2+1$ とおくと、 $dt = 2x\,dx$)

③

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{L\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^L$

$= \lim_{L\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = \underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

(ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+2} = \lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{dx}{x+2} = \lim_{L\to\infty} \left[\log(x+2)\right]_0^L$

$= \lim_{L\to\infty} \left(\log(L+2) - \log 2\right) = \underline{+\infty}$

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-\log(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon}$

$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\log\varepsilon + \log 1\right) = -\lim_{\varepsilon\to+0} \log\varepsilon = -(-\infty) = \underline{+\infty}$

(iv) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon}$

$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{1}\right) = -2\sqrt{0} + 2\sqrt{1} = \underline{2}$

④ $F(t) = \int f(t)\, dt$ とすると、 $F'(t) = f(t)$

$G(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$

$G'(x) = \frac{d}{dx} F(x) - \frac{d}{d(x/2)} F\left(\frac{x}{2}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) \leftarrow \left(\begin{aligned} \frac{d}{dx} F\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{d}{dt} F(t) \frac{dt}{dx}, \quad t = \frac{x}{2} \\ &= F'(t) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f(t) \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned} \right)$

$= F'(x) - F'\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2}$

$= \underline{f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)}$

⑤ $\dfrac{5x-1}{x^3-x}=\dfrac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$ と書ける。

両辺に x を乗じて $x=0$ を代入すると $A=\dfrac{0-1}{-1\cdot 1}=1$

〃 $x-1$ 〃 $x=1$ 〃 $B=\dfrac{5-1}{1\cdot 2}=2$

〃 $x+1$ 〃 $x=-1$ 〃 $C=\dfrac{-5-1}{-1\cdot(-2)}=-3$

$$\therefore I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=\log|x|+2\log|x-1|-3\log|x+1|+C$$
$$=\log\left|\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^3}\right|+C$$

⑥ $t=\sqrt{x^2+1}+x$ とおくと、

$$t-x=\sqrt{x^2+1}$$
$$(t-x)^2=x^2+1$$
$$t^2-2tx+x^2=x^2+1$$
$$\therefore x=\frac{t^2-1}{2t}$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2}{4t^2}$$
$$=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

$$\therefore I=\int\frac{1}{t-\frac{t^2-1}{2t}}\,\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$
$$=\int\frac{t^2+1}{t(t^2+1)}dt$$
$$=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C$$
$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$$

《講評》

①,②：結果を微分して確認すればミスは防げる。原則として部分点を与えていない。

③：被積分関数の値が $\pm\infty$ になる点があるというだけでは、積分値の発散は結論できない。／置換積分での積分区間の変換を失念している人が多い。

⑤：$\log|x|+2\log|x-1|-3\log|x+1|=\frac{2}{3}\log\left|\dfrac{x(x-1)}{x+1}\right|$ という誤りが多い。

全体として：$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ をわざわざ $x=\sin t$ と置換して求めたり、$\int\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{1}{x^2}$ としてしまったり、積分の練習不足という感じの誤りが目につきました。