情報・知能1年生 微分積分II (B) 中間テスト問題 2001年12月4日1限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科・学籍番号・氏名を明記せよ。

1.
不定積分 $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ を下記の (i),(ii) の手順を踏んで求めよう。

(i) 積分変数を x から $t=\sin x$ に変更すると、$I=\displaystyle\int\frac{dt}{1-t^2}$ となることを ていねいに 導出せよ。[10点]

(ii) $\displaystyle\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$ であることを、有理関数の部分分数分解によって示せ。ただし C は積分定数である。なお、右辺を微分すると左辺の被積分関数になることを示すのでは質問の主旨に即していないので解答にはならない。[10点]

2.
不定積分 $I=\displaystyle\int\frac{x^3+2x+1}{x^3+x^2}\,dx$ を求めよ。[20点]

3.
(i) 関数 $G(x)$ が、別の関数 $f(t)$ を用いて $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)dt$ と定義されるとき $G'(x)=\dfrac{dG(x)}{dx}$ を求めよ。[10点]

(ii) 関数 $H(x)$ が $H(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\frac{\arcsin t}{1-t^2}\,dt$ と定義されるとき、$H'(x)=\dfrac{dH(x)}{dx}$ を求めよ。[10点]

4.
(i) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ は $\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}$ と定義される。ただし α は正の定数とする。このとき、I が有限の値をもつような (即ち、無限大に発散しないような) α の値の範囲を求めよ。[10点]

(ii) $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}dx$ を求めよ。[10点]

5.
曲線 C が極座標表示で $r=3+\cos 4\theta\quad(0\le\theta\le 2\pi)$ と定義されるとき、下記の小問 (i) (ii) に答えよ。

(i) 曲線 C の概形を描け。[10点]

(ii) 曲線 C に囲まれた領域の面積 S を求めよ。[10点]

情報・知能1年生　微分積分II(B)中間テスト(2001/12/4実施)の解答

1. (i) $t = \sin x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos x}$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

(注) $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ とした答案があったが正しくは $\cos x = \pm\sqrt{1-t^2}$ である。上の解答では $\pm$ を考えずに済ませるため，あえて $\cos x$ を t で表さずに変形を進めている。

(ii) $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t}$ とおくと，

$1 = (A-B)t + (A+B)$　$\therefore A-B=0$, $A+B=1$，　$\therefore A=B=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\log|1-t| + \frac{1}{2}\log|1+t| + C$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

(注) $\displaystyle\int\frac{dt}{1-t} = -\log|1-t| + C$ の負符号が現れることに気付かなくて，適当に符号をごまかした答案が多くみられた。

2、$\dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x^2} = 1 + \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)}$

$\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1}$ とおける

$-x^2+2x+1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$

$A+C=-1$, $A+B=2$, $B=1$　$\therefore A=B=1$, $C=-2$

$$\therefore I = \int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1}\right)dx = x + \log|x| - \frac{1}{x} - 2\log|x+1| + C$$
$$= x - \frac{1}{x} + \log\left|\frac{x}{(x+1)^2}\right| + C$$

(注) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}$ をまちがえた答案が少なからずあった。

3. (i) $F'(x) = f(x)$ とすると，$G(x) = F(x^2) - F(0)$，$G'(x) = F'(x^2)\,2x = 2xf(x^2)$

(注) $\dfrac{d}{dx}F(0) = f(0)$ でなく，$=0$ です。

(ii) $G'(x) = \dfrac{\arcsin(\sin x)}{1-\sin^2 x}\left(\dfrac{d}{dx}\sin x\right) = \dfrac{x}{\cos^2 x}\cos x = \dfrac{x}{\cos x}$

但し $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の制限により，$\arcsin(\sin x) = x$ となることを利用した。

(注) (i)の一般の $f(t)$ に対するのと同様の考えが，被積分関数が具体的に与えられたときにもできるかを見る問題です。不定積分を求めようとした人は理解が浅薄です。

4. (i) $\alpha \neq 1$ のとき $I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$$\begin{cases} \alpha < 1 \text{ のとき } & 1-\alpha > 0 \text{ だから } \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0 \quad \therefore I = \frac{1}{1-\alpha} \\ \alpha > 1 \text{ のとき } & \alpha - 1 > 0 \text{ だから } \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} = \infty \quad \therefore I = \infty \end{cases}$$

$\alpha = 1$ のとき $I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\log x \right]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to +0} \log \varepsilon = +\infty$

$\therefore$ $(0<)\ \alpha < 1$ のとき収束する

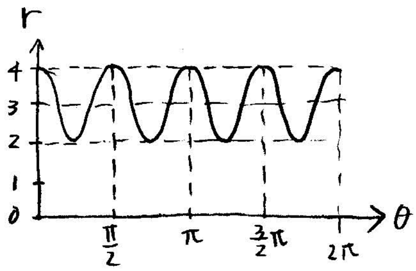
注 $\alpha = 1$ の場合の不定積分が特別な形になり、$\alpha \neq 1$ のときと同じ式で表せないことを失念していた答案が多かった。

(ii) $I = \int_0^\infty e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^\infty = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$

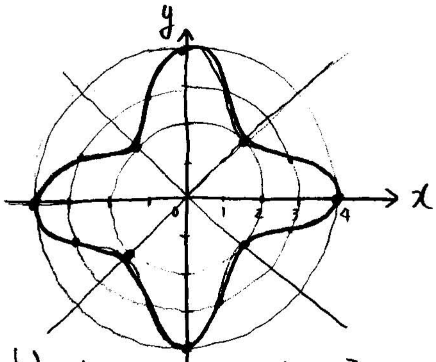
注 不定積分を部分積分法で求めようとして苦労した答案がかなりあった。

$\int e^{-3x} dx = x e^{-3x} - \int x(-3e^{-3x}) dx = \cdots\cdots$ これでは求まりません。

5. (i)



より、



となる。

注 $\theta = \frac{\pi}{2} \cdot n$ で $r=4$, $\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$ で $r=2$ の8点を通っていれば各1点を与えた。$\theta = \frac{\pi}{2} \cdot n$ で尖っている答案が多かったですが「点を打ってつなぐ」という基本がわかっていることを評価して8点与えてあります。

(ii) $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + \cos 4\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (9 + 6\cos 4\theta + \cos^2 4\theta) d\theta$

$= \frac{9}{2} \cdot 2\pi + 3 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{19}{2} \pi$

注 $\int_0^{2\pi} \underset{(\sin)}{\cos}^2 n\theta = \pi$ と $\int_0^{2\pi} \underset{(\sin)}{\cos}\, n\theta\, d\theta = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を覚えておくと応用数学IIやIIIで重宝するでしょう。