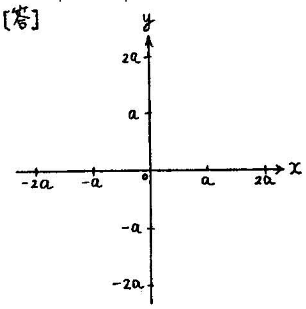
微分積分 II 期末試験用紙 (電気電子工学科・物理工学科 1 年生 A・B クラス共通　2001 年 1 月 31 日 2 限実施)

学科	平成　　年入学	学籍番号	氏名

1. カルディオイド曲線 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ a$ は正の定数$)$ について下記の問に答えよ。

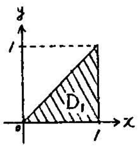
(i) この曲線の概形を描け。曲線と x 軸、y 軸との交点の位置を正確に描くように留意せよ。[10 点]

[答]

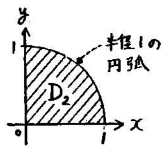


(ii) この曲線の囲む領域の面積 S を求めよ。[10 点]

2. 重積分 $I_1 = \iint_{\mathrm{D}_1} (x^2 + 3xy)\, dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_1 は右図で斜線を施した領域である。[20 点]

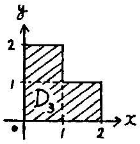


3. 重積分 $I_2 = \iint_{\mathrm{D}_2} \exp(x^2 + y^2)\, dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_2 は右図で斜線を施した領域である。[20 点]

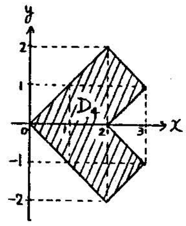


4. 下記の小問に答えよ。

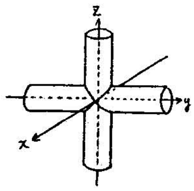
(i) 重積分 $I_3 = \iint_{\mathrm{D}_3} x^3 y^2 \, dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_3 は右図で斜線を施した領域である。[10 点]



(ii) 重積分 $I_4 = \iint_{\mathrm{D}_4} \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3 \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 dxdy$ の値を求めよ。
ただし D_4 は右図で斜線を施した領域である。(ヒント： 変数変換 $x = u + v,\ \ y = u - v$ により、I_3 に類似した重積分になる。) [10 点]

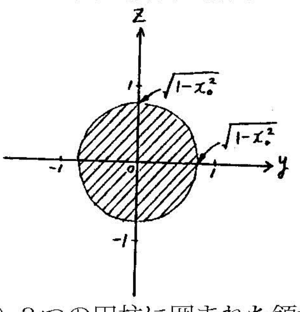


5. ２つの円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と $x^2 + z^2 = 1$ とは、右図のように交差する。
２つの円柱の重なっている領域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } x^2 + z^2 \leq 1\}$ の体積 V を求めることを考える。

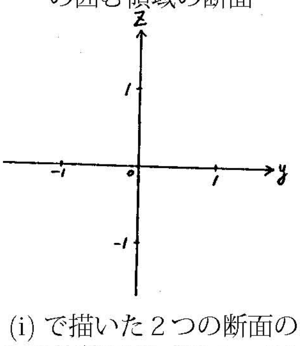


(i) それぞれの円柱に囲まれた領域の、平面 $x = x_0$ による断面を例にならって図示せよ。
ただし $-1 \leq x_0 \leq 1$ とする。[10 点]

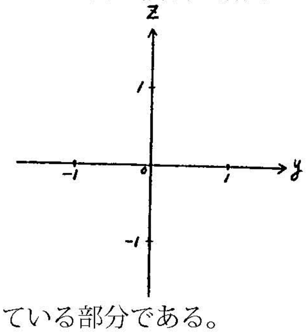
【例】 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の囲む領域の断面



【答】 円柱 $x^2 + y^2 = 1$ の囲む領域の断面



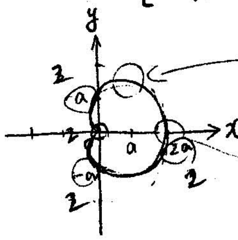
【答】 円柱 $x^2 + z^2 = 1$ の囲む領域の断面



(ii) ２つの円柱に囲まれた領域の断面は (i) で描いた２つの断面の重なっている部分である。
断面積を x (あるいは x_0) で積分することで体積 V を求めよ。[10 点]

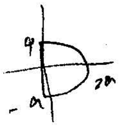
［解 答］

1. (i)
10



$y=a(1+\cos x)$ のグラフ --- 0点

ふくろみせ方で +1
とがり方 +1



は 7点

(ii)
10

公式2点

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$\int_0^{2\pi} r\,d\theta$ --- 0点　　計算ミス -2

なしは -2点

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr$ 抜け --- 1点

2. 20

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^x dy\,(x^2+3xy) = \int_0^1 dx\left[x^2y + \frac{3}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=x}$$

12

$$= \int_0^1 dx\left(x^3 + \frac{3}{2}x^3\right) = \int_0^1 \frac{5}{2}x^3 dx = \left[\frac{5}{8}x^4\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{8}$$

$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdots = \frac{13}{12}$ に5点

$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \cdots = \frac{11}{24}$ 答があって4点、答があって満点

$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdots = \frac{5}{24}$ 答がから --- 4点

3. 20

2π は -2　　これぬけ → 4

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\,dr\,\exp(r^2) = \int_0^{\pi/2} d\theta\,\underbrace{\left[\frac{1}{2}\exp(r^2)\right]_{r=0}^{r=1}}_{5}$$

10

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta\,\frac{1}{2}(e-1) = \frac{\pi}{4}(e-1)$$

忘れた → -5

$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdots$ は答がでない 0点

$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, e^{x^2+y^2}$ 式に5点

4. (i) 10

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^2 dy\, x^3y^2 + \int_1^2 dx \int_0^1 dy\, x^3y^2 \quad 5$$

$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdots = \frac{1}{12}$ (D_3の $\frac{1}{3}$ の部分) 3点

$$= \left\{\int_0^1 x^3 dx\right\}\left\{\int_0^2 y^2 dy\right\} + \left\{\int_1^2 x^3 dx\right\}\left\{\int_0^1 y^2 dy\right\}$$

計算ミス -2

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} + \frac{1}{4}(16-1)\,\frac{1}{3}$$

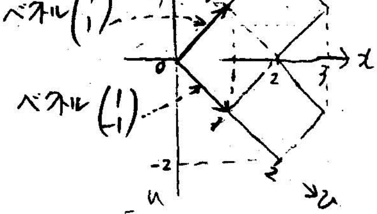
$$= \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12}$$

(ii) 10

変数変換　$u = \frac{x+y}{2}$　$v = \frac{x-y}{2}$

即ち、$x = u+v$, $y = u-v$　即ち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}v$

ヤコビアン　$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $|J| = 2$ 4



$$I_4 = 2\int_0^1 dv \int_0^2 du\; u^3v^2 + 2\int_1^2 dv \int_0^1 du\; u^3v^2 \quad (= 2I_3)$$

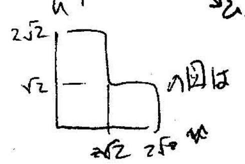
4　　$= 2\cdot\frac{23}{12} = \frac{23}{6}$

$$= 2\left\{\int_0^1 v^2 dv\right\}\left\{\int_0^2 u^3 du\right\} + 2\left\{\int_1^2 v^2 dv\right\}\left\{\int_0^1 u^3 du\right\}$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}v^3\right]_0^1 \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^2 + 2\left[\frac{1}{3}v^3\right]_1^2 \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{4} + 2\cdot\frac{1}{3}(8-1)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{7}{6} = \frac{16+7}{6} = \frac{23}{6}$$



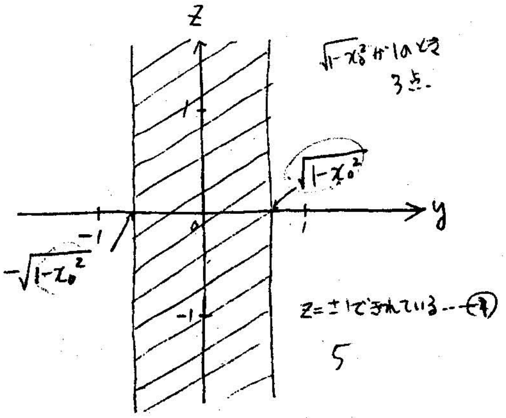
の図は 1点

$\frac{23}{6}$ は 9点　J

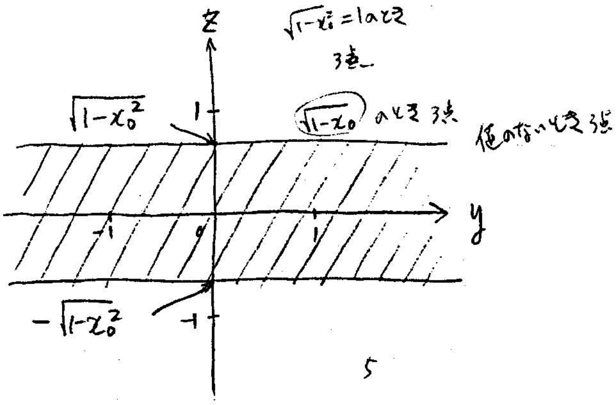
$2\times I_3$ で (i)で I_3を間違えたのみの場合 8

5. (i)

10



円柱 $x^2+y^2=1$ の囲む領域の断面



円柱 $x^2+z^2=1$ の囲む領域の断面

(ii) 断面積 $S(x) =$ (一辺 $2\sqrt{1-x^2}$ の正方形の面積) $= 4(1-x^2)$ 4

10

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)\,dx = 4\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 4\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

忘れたら −3

(i)の誤答に忠実な計算 -- 5点

ここに π をつけたら −3

$\int_0^1$ は −2

3