電子・物工１年生 微分積分II (A) 中間テスト問題 2000 年 11 月 22 日 2 限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科・学籍番号・氏名を明記せよ。なお、積分定数として、断わることなく C, C' 等の記号を用いてよい。

●下記の (1) 〜 (3) の不定積分を求めよ。この 3 題に関しては、答だけを記せばよい。

(1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ **(2)** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3)** $I = \displaystyle\int \log x \, dx$

●下記の (4)、(5) の不定積分を置換積分法または部分積分法により求めよ。

(4) $I = \displaystyle\int x^8 \exp\left(x^9\right) \, dx$

(5) $I = \displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$

●下記の不定積分 (6) を部分分数分解により求めよ。

(6) $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^4+x^2} \, dx$

●下記の不定積分 (7) を積分変数の置換 $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$ により求めよ。

(7) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

●下記の不定積分 (8) を積分変数の置換 $t = \tan \dfrac{x}{2}$ により求めよ。

(8) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

●下記の定積分 (9) を求めよ。

(9) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

●下記の問 (10) に答えよ。

(10) $G(x) = \displaystyle\int_{a+x^2}^{b} f(t)dt$ とする。このとき $\dfrac{dG(x)}{dx}$ を求めよ。
ただし、a, b は定数である。

電子・物工 1年生 微積II (A) 中間試験解答 (2000/11/22/2限実施)

(1) $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \underline{\tan x + C}$

(2) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\arcsin x + C}$ または $= \underline{-\arccos x + C'}$

(補足) $\left[\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \therefore C' = \frac{\pi}{2} + C \right]$

(3) $I = \int \log x \, dx = \underline{x \log x - x + C}$

㊟ 被積分関数 $\log x$ が意味をもつのは $x > 0$ のときなので右辺では $\log|x|$ にしていない。

(4) $I = \int x^8 \exp(x^9) dx = \frac{1}{9} \int (x^9)' \exp(x^9) dx = \frac{1}{9} \int \exp(x^9) d(x^9) = \underline{\frac{1}{9} \exp(x^9) + C}$

(5) $I = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$ (部分積分)

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx$ (部分積分)

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

$= \underline{(2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C}$

(6) $\frac{x-1}{x^4 + x^2} = \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ と書ける ← ここを必ずマスターして下さい

$\therefore \quad x - 1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$

$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$

$\therefore \quad A + C = 0, \; B + D = 0, \; A = 1, \; B = -1 \quad \therefore \; C = -1, \; D = 1$

$\therefore \; I = \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right\} dx$

$= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \arctan x + C'$

$= \underline{\frac{1}{x} + \log\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \arctan x + C'}$

(補足) $\left[\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)' dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]$

(7) $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$

$t + x = \sqrt{x^2+x+1}$

$t^2 + 2tx + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + x + 1$

$\therefore \quad x = \dfrac{t^2-1}{1-2t}$

$\sqrt{x^2+x+1} = t + x = t + \dfrac{t^2-1}{1-2t}$

$\qquad = \dfrac{-t^2+t-1}{1-2t}$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t(1-2t)-(t^2-1)\cdot(-2)}{(1-2t)^2}$

$\qquad = \dfrac{-2(t^2-t+1)}{(1-2t)^2}$

注 $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$ とすると複雑になる一方。
被積分関数をtで表すという方針を意識できていますか。

$I = \displaystyle\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\frac{dx}{dt}\,dt$

$= \displaystyle\int \frac{1-2t}{t^2-1}\cdot\frac{\cancel{1-2t}}{-t^2+t-1}\cdot\frac{\cancel{-2(t^2-t+1)}}{\cancel{(1-2t)^2}}\,dt$

$= 2\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-1}$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$= \log|t-1| - \log|t+1| + C$

$= \log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + C$

$= \log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - x - 1}{\sqrt{x^2+x+1} - x + 1}\right| + C$

(8) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{dx}{dx} = \dfrac{2}{1+t^2} \end{cases}$$

暗記せずとも導出できればよい。

$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$ より $\tan^2\frac{x}{2} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$\therefore \begin{cases} \cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2\arctan t$

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$

$I = \displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}\,\frac{dx}{dt}\,dt$

$= \displaystyle\int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{4-4t^2}{1+t^2} + 5}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$

注 この積分をまちがえた人が10人くらいいました。

$= 2\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2\int\frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+3} + C$

(9) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

注 $I=0$ と答えた人は、被積分関数 $\frac{1}{1+x^2}$ のグラフを思い描いてみなさい。

(10) $F'(t) = f(t)$ とすると $G(x) = F(b) - F(a+x^2)$

$\dfrac{dG(x)}{dx} = -F'(a+x^2)\,\dfrac{d(a+x^2)}{dx} = -2x f(a+x^2)$