微分積分 I (a,b)　定期試験　問題・答案用紙　（全 6 頁中の第 1 頁目）

福井大学工学部 物質・生命化学科 1 年生対象, 担当教員 井上・田嶋,　2018 年 8 月 3 日 2 限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】,【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とせよ。

記入例： $2 = \boxed{2} = \boxed{0}\boxed{2} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{2} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$, $-3 = \boxed{-}\boxed{3} = \boxed{-}\boxed{0}\boxed{3} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)〜v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び, その番号で答えよ。(2 点× 5 問=10 点)

i) $\dfrac{d}{dx}2^x =$ (選択肢の $\boxed{1\text{:}\ 5}$ 番)　選択肢：1: 2^x　2: $\dfrac{1}{2^x}$　3: $2^x \log x$　4: $\dfrac{\log x}{2^x}$　5: $2^x \log 2$　6: $\dfrac{\log 2}{2^x}$

ii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) =$ (選択肢の $\boxed{2\text{:}\ 6}$ 番)　選択肢：1: $x^3 + xy^2$　2: $x^3 + xy$　3: $x^3 + 2xy$　4: xy^2　5: xy　6: $2xy$

iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}e^{xy} =$ (選択肢の $\boxed{3\text{:}\ 3}$ 番)　選択肢：1: xe^{xy}　2: ye^{xy}　3: xye^{xy}　4: x　5: y　6: xy

iv) $\dfrac{d^n}{dx^n}\sin x =$ (選択肢の $\boxed{4\text{:}\ 2}$ 番)
選択肢：1: $\sin x$　2: $\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　3: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$　4: $\cos x$　5: $\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　6: $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

v) z および y が、それぞれ、y および x の 2 回微分可能な関数であるとき
$\dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{d^2 z}{dy^2} \cdot$ (選択肢の $\boxed{5\text{:}\ 2}$ 番) $+ \dfrac{dz}{dy} \cdot$ (選択肢の $\boxed{6\text{:}\ 3}$ 番) が成り立つ。（各解答枠が 1 点）
選択肢 (2 つの解答枠に共通)：1: $\dfrac{dy}{dx}$　2: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$　3: $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$　4: $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^2$　5: $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\dfrac{dy}{dx}$　6: $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 30 年 8 月 3 日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質・生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /10

【2】 小問 i)〜x) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(6 点× 4 問=24 点。第 3〜4 頁に続く。)

i) $\sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{8}{17}\right) = \dfrac{\boxed{7:\ 1}\boxed{8:\ 5}}{\boxed{9:\ 1}\boxed{10:\ 7}}$

ii) $f(x) = \dfrac{d}{dx}\log\Big\{\log\big(\log x\big)\Big\}$ 　$(x > e)$ とするとき、$f(e^2) = \dfrac{1}{\boxed{11:\ 0}\boxed{12:\ 2}\, e^{\boxed{13:\ 0}\boxed{14:\ 2}} \log \boxed{15:\ 0}\boxed{16:\ 2}}$

iii) $\dfrac{d^n}{dx^n}x^2e^{3x} = 3^{n-2}e^{3x}\left(\boxed{17:\ 0}\boxed{18:\ 9}x^2 + \boxed{19:\ 0}\boxed{20:\ 6}nx + \boxed{21:\ 0}\boxed{22:\ 1}n^2 + \boxed{23:\ -}\boxed{24:\ 1}n + \boxed{25:\ 0}\boxed{26:\ 0}\right)$

iv) $e^{-5x} = \boxed{27:\ 0}\boxed{28:\ 1} + \boxed{29:\ -}\boxed{30:\ 5}x + \dfrac{\boxed{31:\ 2}\boxed{32:\ 5}}{\boxed{33:\ 2}}x^2 + o(x^2)$

【2】(第 2 頁からのつづき。6 点× 3 問=18 点)

v) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \boxed{34:\ 0}\boxed{35:\ 0} + \boxed{36:\ 0}\boxed{37:\ 1}\,x + \dfrac{\boxed{38:\ -}\boxed{39:\ 1}}{\boxed{40:\ 2}}x^2 + o(x^2)$

vi) $e^x \cos 2x = \boxed{41:\ 0}\boxed{42:\ 1} + \boxed{43:\ 0}\boxed{44:\ 1}\,x + \dfrac{\boxed{45:\ -}\boxed{46:\ 3}}{\boxed{47:\ 2}}x^2 + o(x^2)$

vii) $\lim_{x\to 0}\left(x+1\right)^{\frac{x+3}{x}} = e^{\boxed{48:\ 0}\boxed{49:\ 3}}$

【2】（第３頁からのつづき。6 点× 3 問=18 点)

viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-e^x}{x^4}=\frac{\boxed{50:\ -}\boxed{51:\ 1}}{\boxed{52:\ 2}\boxed{53:\ 4}}$

ix) 曲面 $z=x^3y^4$ の $(x,y)=(1,2)$ での接平面の方程式は $z=\boxed{54:\ 0}\boxed{55:\ 4}\boxed{56:\ 8}\,x+\boxed{57:\ 0}\boxed{58:\ 3}\boxed{59:\ 2}\,y+\boxed{60:\ -}\boxed{61:\ 9}\boxed{62:\ 6}$ である。

x) $z=x^3y^4$ のとき $z_{xx}+z_{xy}+z_{yx}+z_{yy}=\boxed{63:\ 0}\boxed{64:\ 0}\,x^4y+\boxed{65:\ 1}\boxed{66:\ 2}\,x^3y^2+\boxed{67:\ 2}\boxed{68:\ 4}\,x^2y^3+\boxed{69:\ 0}\boxed{70:\ 6}\,xy^4$

【3】 $z = \mathrm{Tan}^{-1}\, xy,\ x = \dfrac{1}{t+1},\ y = t^2 - 1$ のとき下記の小問 (1)〜(3) に答えよ。(合計 15 点)

(1) z を t のみで表せ。次に、その表式を t で微分することにより、$\dfrac{dz}{dt}$ を t のみで表せ。(4 点)

解答例

$z = \mathrm{Tan}^{-1}\, xy = \mathrm{Tan}^{-1}\left\{\dfrac{1}{t+1}(t^2-1)\right\} = \mathrm{Tan}^{-1}(t-1)$ ⋯ (この右辺の式に 2 点)

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\mathrm{Tan}^{-1}(t-1) = \left\{\dfrac{d}{d(t-1)}\mathrm{Tan}^{-1}(t-1)\right\}\dfrac{d}{dt}(t-1) = \dfrac{1}{(t-1)^2+1}\cdot 1 = \dfrac{1}{t^2+2t+2}$ (答) ⋯ (答の式に 2 点)

(2) z_x および z_y を x と y で表せ。(4 点)

補足説明：$z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ は、z を x と y の関数として見たとき、それを x で偏微分した結果を表す。$z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ も同様である。

解答例

$z_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Tan}^{-1}\, xy = \left\{\dfrac{d}{d(xy)}\mathrm{Tan}^{-1}\,(xy)\right\}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}xy = \dfrac{1}{(xy)^2+1}\cdot y = \dfrac{y}{x^2y^2+1}$ (答) ⋯(2 点)

$z_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Tan}^{-1}\, xy = \left\{\dfrac{d}{d(xy)}\mathrm{Tan}^{-1}\,(xy)\right\}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}xy = \dfrac{1}{(xy)^2+1}\cdot x = \dfrac{x}{x^2y^2+1}$ (答) ⋯(2 点)

(3) 小問 (1) の第 2 の答の式 ($\frac{dz}{dt}$ を t のみで表した式) を、小問 (2) の答と「合成関数の微分」を使って求めよ。(7 点)

補足説明：「合成関数の微分」とは、教科書で「合成関数の微分 I」という呼称を与えられた定理 3.2.3 を意味する。分からない人は試験終了後に教科書 p.58 を見よ。試験中に見たらカンニングになる。この小問 (3) では、小問 (1) と同じ計算方法で答を得た答案には得点を与えない。

解答例

$\dfrac{dz}{dt} = z_x\dfrac{dx}{dt} + z_y\dfrac{dy}{dt}$ ⋯ (この式の右辺に 3 点を与える)

小問 (2) の答を使うと

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{y}{x^2y^2+1}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{x^2y^2+1}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}}{x^2y^2+1}$

上式に

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{t+1} = -\dfrac{1}{(t+1)^2}$ ⋯ (この式の右辺に 1 点を与える)

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^2-1) = 2t$ ⋯ (この式の右辺に 1 点を与える)

を代入し、x および y を t で表すと、

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(t^2-1)\left(-\frac{1}{(t+1)^2}\right) + \frac{1}{t+1}\cdot 2t}{\left(\frac{1}{t+1}\right)^2(t^2-1)^2+1} = \dfrac{-\frac{t-1}{t+1} + \frac{2t}{t+1}}{(t-1)^2+1} = \dfrac{\frac{-t+1+2t}{t+1}}{t^2-2t+2} = \dfrac{1}{t^2-2t+2}$ (答) ⋯(正答は 2 点。軽微なミスは 1 点)

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 30 年 8 月 3 日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質・生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /15

【4】 $z = f(x, y)$, $x = u^2 + v$, $y = v^2$ とするとき、下記の小問 (1),(2) に答えよ。(15点)

(1) z_x および z_y を z_u, z_v, u, v のうち必要なものを用いて表せ。(10点)

[補足説明] $z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $z_u = \frac{\partial f(u^2+v,v^2)}{\partial u}$, $z_v = \frac{\partial f(u^2+v,v^2)}{\partial v}$ とする。

解答例

教科書 p.59 の定理 3.2.4「合成関数の微分 II」により、

$$\begin{cases} z_u &= x_u z_x + y_u z_y \cdots (1\text{点}) \\ z_v &= x_v z_x + y_v z_y \cdots (1\text{点}) \end{cases}$$

上式右辺に現れるヤコビ行列（関数行列）の要素は、

$$\begin{cases} x_u &= & 2u & \cdots (1\text{点}) \\ y_u &= & 0 & \cdots (1\text{点}) \\ x_v &= & 1 & \cdots (1\text{点}) \\ y_v &= & 2v & \cdots (1\text{点}) \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{cases} z_u &= 2u z_x \\ z_v &= z_x + 2v z_y \end{cases} \quad \cdots (\text{ここ迄で}6\text{点})$$

上式を z_x と z_y を未知数とする連立方程式と見て、その解を求めると、

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2u} & 0 \\ -\frac{1}{4uv} & \frac{1}{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} \cdots (\text{ここ迄で}10\text{点})$$

答は

$$z_x = \frac{1}{2u} z_u \ (\text{答}) \cdots (2\text{点})$$

$$z_y = -\frac{1}{4uv} z_u + \frac{1}{2v} z_v \ (\text{答}) \cdots (2\text{点})$$

(2) z_{xx} を z_{uu}、z_u、z_{vv}、z_v、z_{uv}、u、v のうち必要なものを用いて表せ。(5点)

[補足説明] $z_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $z_{uu} = \frac{\partial^2 f(u^2+v,v^2)}{\partial u^2}$, $z_{vv} = \frac{\partial^2 f(u^2+v,v^2)}{\partial v^2}$, $z_{uv} = \frac{\partial^2 f(u^2+v,v^2)}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f(u^2+v,v^2)}{\partial u \partial v}$ とする。

解答例

小問 (1) の答より、偏微分作用素の関係式 $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial}{\partial u}$ が成立するので、

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z_x$$

$$= \frac{1}{2u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2u} z_u\right) \cdots (\text{ここ迄で}2\text{点})$$

$$= \frac{1}{2u}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2u}\right) z_u + \frac{1}{2u}\left(\frac{\partial}{\partial u} z_u\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2u}\left(-\frac{1}{2u^2} z_u + \frac{1}{2u} z_{uu}\right)$$

$$= \frac{1}{4u^2} z_{uu} - \frac{1}{4u^3} z_u \ (\text{答}) \cdots (5\text{点。内訳は左の項}2\text{点、右の項}3\text{点。余分な項は各項}1\text{点減点。})$$