微分積分 I (a,b)　中間試験　問題・答案用紙　（全 6 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1 年生対象, 担当教員 井上・田嶋,　2018 年 6 月 29 日 2 限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】〜【5】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とせよ。

記入例：　$2 = \boxed{2} = \boxed{0}\boxed{2} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{2} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$,　$-3 = \boxed{-}\boxed{3} = \boxed{-}\boxed{0}\boxed{3} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)〜v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び, その番号で答えよ。ただし, a は正の定数とする。(2 点× 5 問=10 点)

i) $\dfrac{d}{dx}(\sin x + \cos x) =$ (選択肢の $\boxed{{}^{1:}\ 3}$ 番)

選択肢：1: $\sin x + \cos x$　2: $\sin x - \cos x$　3: $-\sin x + \cos x$　4: $-\sin x - \cos x$　5: $\tan x$　6: 0

ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) =$ (選択肢の $\boxed{{}^{2:}\ 4}$ 番)

選択肢：1: $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x}$　2: $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} - 2\sqrt{x}$　3: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

4: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$　5: $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$　6: $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

iii) $\dfrac{d}{dx}\cos ax =$ (選択肢の $\boxed{{}^{3:}\ 2}$ 番)　選択肢：1: $a\sin ax$　2: $-a\sin ax$　3: $\sin ax$　4: $a\cos ax$　5: $-a\cos ax$　6: $\cos ax$

iv) $\dfrac{d}{dx}e^x \log x =$ (選択肢の $\boxed{{}^{4:}\ 6}$ 番)　選択肢:1: $-e^x \log x$　2: $e^x \log x$　3: $-\dfrac{e^x}{x}$　4: $\dfrac{e^x}{x}$　5: $e^x(\log x - \dfrac{1}{x})$　6: $e^x(\log x + \dfrac{1}{x})$

v) $\dfrac{d}{dx}\cos^3 x =$ (選択肢の $\boxed{{}^{5:}\ 4}$ 番)

選択肢：1: $3\cos^2 x$　2: $-3\cos^2 x$　3: $3\sin x\cos^2 x$　4: $-3\sin x\cos^2 x$　5: $3\sin^2 x\cos x$　6: $-3\sin^2 x\cos x$

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 30 年 6 月 29 日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /10

【2】 小問 i)〜xii) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5 点× 4 問=20 点。第 3〜4 頁に続く。)

i) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\boxed{6:\ 0}\boxed{7:\ 2}}{\boxed{8:\ 3}}\pi$

ii) $\sin\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{\boxed{9:\ 2}}{\boxed{10:\ 5}}}$

iii) $\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}} + \mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\boxed{11:\ -}\boxed{12:\ 7}}{\boxed{13:\ 1}\boxed{14:\ 1}}$

iv) $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)^3}{\sqrt{x+3}}} = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)^3}{\sqrt{x+3}}}\left(\frac{\boxed{15:\ 0}\boxed{16:\ 1}}{\boxed{17:\ 2}(x+1)} + \frac{\boxed{18:\ 0}\boxed{19:\ 3}}{\boxed{20:\ 2}(x+2)} + \frac{\boxed{21:\ -}\boxed{22:\ 1}}{\boxed{23:\ 4}(x+3)}\right)$

【2】（第2頁からのつづき。5点× 4問=20点)

v) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{\boxed{24:\ 0}\boxed{25:\ 4}\,x+\boxed{26:\ 0}\boxed{27:\ 3}\,x^2}{\boxed{28:\ 0}\boxed{29:\ 2}\,(1+x)\sqrt{1+x-x^4}}$

vi) $\dfrac{d^7}{dx^7}xe^{2x} = \left(\boxed{30:\ 1}\boxed{31:\ 2}\boxed{32:\ 8}\,x+\boxed{33:\ 4}\boxed{34:\ 4}\boxed{35:\ 8}\right)e^{2x}$

vii) $f(x)=\dfrac{d^6}{dx^6}(x+1)\cos x$ のとき、$f(0)=\boxed{36:\ -}\boxed{37:\ 1}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{38:\ -}\boxed{39:\ 6}$ である。

viii) パラメータ t を媒介変数として表示された xy 平面上の曲線 $x=\mathrm{Sin}^{-1}t$, $y=\mathrm{Tan}^{-1}t$ の $t=\frac{1}{2}$ に対応する点における接線の方程式は $y=\dfrac{\boxed{40:\ 0}\boxed{41:\ 2}\sqrt{\boxed{42:\ 3}}}{\boxed{43:\ 5}}\left(x-\dfrac{\pi}{\boxed{44:\ 6}}\right)+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$ である。

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成30年 6月29日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /20

【2】(第 3 頁からのつづき。5 点× 4 問=20 点)

ix) $f(x) = \sin\bigl(\log(\cos x)\bigr)$ のとき $f'(0) = \boxed{45:\ 0}\boxed{46:\ 0}$ である。また、$\alpha = \dfrac{\boxed{47:\ 1}}{\boxed{48:\ 2}} \log 2$ とすると、$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{49:\ 0} \sin\alpha + \boxed{50:\ -} \cos\alpha$ である。

x) $\bigl(f(x)g(x)\bigr)'''' = \boxed{51:\ 0}\boxed{52:\ 1}\, f''''(x)g(x) + \boxed{53:\ 0}\boxed{54:\ 4}\, f'''(x)g'(x) + \boxed{55:\ 0}\boxed{56:\ 6}\, f''(x)g''(x) + \boxed{57:\ 0}\boxed{58:\ 4}\, f'(x)g'''(x) + \boxed{59:\ 0}\boxed{60:\ 1}\, f(x)g''''(x)$

xi) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\sin x - \cos x}{e^x - \sin x - \cos x} = \frac{\boxed{61:\ 0}\boxed{62:\ 3}}{\boxed{63:\ 0}\boxed{64:\ 8}}$

xii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+4x+3x^2}{1-3x+3x^2}\right)^x = \exp \frac{\boxed{65:\ 0}\boxed{66:\ 7}}{\boxed{67:\ 0}\boxed{68:\ 3}}$

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 30 年 6 月 29 日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /20

【3】 微分公式 $(\cos x)' = -\sin x$ を利用して下記の等式を証明せよ (10 点)。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

解答例

$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ とおくと

$x = \cos y \cdots (1)$

$0 \le y \le \pi \cdots (2)$

(1) より $\frac{dx}{dy} = -\sin y$

(2) より $\sin y \ge 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$. (1) を使って $\sin y = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (証明終)

【4】 対数微分法の公式 $\dfrac{d}{dx}f(x) = f(x)\dfrac{d}{dx}\log|f(x)|$ を証明せよ (5 点)。

次に、$\dfrac{d}{dx}x^{x^x}$ を求めよ。ただし $x > 0$ とし、x^{x^x} は『x の「x の x 乗」乗』を意味するものとする (5 点)。

解答例

$t = f(x)$ とおくと $\frac{d}{dt}\log|t| = \frac{1}{t}$ および合成関数の微分法により

$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left\{\frac{d}{dt}\log|t|\right\}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$

$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = f(x)\frac{d}{dx}\log|f(x)| \cdots$(証明終)

$(x^{x^x})' = x^{x^x}\left\{\log(x^{x^x})\right\}'$

$= x^{x^x}\{x^x\log x\}'$

$= x^{x^x}\{(x^x)'\log x + x^x(\log x)'\}$

$= x^{x^x}\left\{x^x(\log(x^x))'\log x + x^x\frac{1}{x}\right\}$

$= x^{x^x}\left\{x^x(x\log x)'\log x + x^x\frac{1}{x}\right\}$

$= x^{x^x}x^x\left\{(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right\} \cdots$(答)

$= x^{x^x+x}\left\{(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right\} \cdots$(答)

$= x^{x^x+x-1}\{x(\log x + 1)\log x + 1\} \cdots$(答)

【5】 以下の小問 i)〜iii) に答えよ。最終的な答の式中には, 階乗記号「!」は使ってよいが, 項の省略を表す記号の「$\cdots$」は使ってはならない。例えば, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ は $n!$ と書き表し, $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\cdots\cdot(-n)$ は $(-1)^n n!$ と書き表せ。

i) 恒等式 $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$ が成立するように定数 A, B の値を定めよ。(2 点)

ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ のとき、$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする (4 点) 。

iii) $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ のとき、$g(x)$ の n 次導関数 $g^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする (4 点) 。

解答例

i)

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

両辺に $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ を乗じると

$1 = A(x+1) + B(x-1)$

$1 = (A+B)x + A - B$

$\therefore A+B = 0,\ A-B = 1$

$\therefore\ A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}\ \cdots$(答)

ii)

$\left\{(x+c)^{-1}\right\}^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)\cdot(x+c)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x+c)^{n+1}}$ なので

$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$

$= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}\cdots$(答)

iii)

$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A'}{x-1} + \frac{B'}{x+1}$ とおくと

$x = A'(x+1) + B'(x-1) = (A'+B')x + A' - B'$

$\therefore A'+B' = 1,\ A'-B' = 0$

$\therefore\ A' = B' = \frac{1}{2}$

$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$

$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}\cdots$(答)

別解法

Reibnitz の公式を使って

$g^{(n)}(x) = \{xf(x)\}^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

$= x\frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\} + n\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n}\right\}$

$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{x}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x}{(x+1)^{n+1}}\right\} - \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{x-1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x+1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$

$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}\cdots$(答)

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 30 年 6 月 29 日	出題者: 井上・田嶋	学科 物質生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /10