2次元極座標でのラプラス作用素 (演算子)

【問題】 $z = z(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき, $\triangle z = z_{xx} + z_{yy}$ を, $r, \theta, z_r, z_\theta, z_{rr}, z_{r\theta}, z_{\theta\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ. ただし, $z_{\theta r} = z_{r\theta}$ が成り立つとしてよい.

【解答】

多変数関数に関する「合成関数の微分公式 II」(教科書 p.59) により, 任意の全微分可能な関数 $f = f(x,y)$ について

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \tag{1}$$

が成り立つ. これを 2 変数 f_x, f_y についての連立 1 次方程式と見て解くと,

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

を得る. 式 (2) を行列を使わずに 2 本の方程式として書くと

$$f_x = (\cos\theta)\, f_r - \frac{\sin\theta}{r} f_\theta \tag{3}$$

$$f_y = (\sin\theta)\, f_r + \frac{\cos\theta}{r} f_\theta \tag{4}$$

を得る.

式 (3) および式 (4) に $f = z$ を代入すると,

$$z_x = (\cos\theta)\, z_r - \frac{\sin\theta}{r} z_\theta \tag{5}$$

$$z_y = (\sin\theta)\, z_r + \frac{\cos\theta}{r} z_\theta \tag{6}$$

を得る.

また, 式 (3) に $f = z_x$ を代入すると,

$$z_{xx} = (\cos\theta)\, z_{xr} - \frac{\sin\theta}{r} z_{x\theta} \tag{7}$$

を得る. 式 (7) の右辺に現れる z_{xr} および $z_{x\theta}$ は,

$$\begin{aligned} z_{xr} &= \frac{\partial}{\partial r} z_x = \frac{\partial}{\partial r}\left\{(\cos\theta)\, z_r - \frac{\sin\theta}{r} z_\theta\right\} && (8) \\ &= (\cos\theta) \frac{\partial}{\partial r} z_r - (\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right) z_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} z_\theta && (9) \\ &= (\cos\theta)\, z_{rr} + \frac{\sin\theta}{r^2} z_\theta - \frac{\sin\theta}{r} z_{\theta r} && (10) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} z_{x\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta} z_x = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{(\cos\theta)\, z_r - \frac{\sin\theta}{r} z_\theta\right\} && (11) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right) z_r + (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} z_r - \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\right)\frac{1}{r} z_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} z_\theta && (12) \\ &= -(\sin\theta) z_r + (\cos\theta) z_{r\theta} - \frac{\cos\theta}{r} z_\theta - \frac{\sin\theta}{r} z_{\theta\theta} && (13) \end{aligned}$$

である．ただし, 式 (8) から式 (9) への式変形と式 (11) から式 (12) への式変形では「関数の積の微分公式」を使った．z_r と z_θ は, z と同様に, 2 変数 (r, θ) の関数であることに留意せよ．式 (7) に式 (10) と式 (13) を代入すると

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (\cos^2\theta) z_{rr} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} z_{\theta r} \\ &\quad + \frac{\sin^2\theta}{r} z_r - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} z_{r\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r^2} z_{\theta\theta} \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．ここで $z_{\theta r} = z_{r\theta}$ を使って,

$$z_{xx} = (\cos^2\theta) z_{rr} + \frac{\sin^2\theta}{r} z_r - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} z_{r\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta \tag{15}$$

を得る．

式 (4) に $f = z_y$ を代入すると

$$z_{yy} = (\sin\theta)\, z_{yr} + \frac{\cos\theta}{r} z_{y\theta} \tag{16}$$

を得る．式 (16) の右辺に現れる z_{yr} および $z_{y\theta}$ は,

$$z_{yr} = \frac{\partial}{\partial r} z_y = \frac{\partial}{\partial r}\left\{(\sin\theta)\, z_r + \frac{\cos\theta}{r} z_\theta\right\} \tag{17}$$

$$= (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} z_r + (\cos\theta)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right) z_\theta + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} z_\theta \tag{18}$$

$$= (\sin\theta)\, z_{rr} - \frac{\cos\theta}{r^2} z_\theta + \frac{\cos\theta}{r} z_{\theta r} \tag{19}$$

および

$$z_{y\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} z_y = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{(\sin\theta)\, z_r + \frac{\cos\theta}{r} z_\theta\right\} \tag{20}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\right) z_r + (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} z_r + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right)\frac{1}{r} z_\theta + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} z_\theta \tag{21}$$

$$= (\cos\theta) z_r + (\sin\theta) z_{r\theta} - \frac{\sin\theta}{r} z_\theta + \frac{\cos\theta}{r} z_{\theta\theta} \tag{22}$$

である．式 (16) に式 (19) と式 (22) を代入すると, $z_{\theta r} = z_{r\theta}$ を使って,

$$\begin{aligned} z_{yy} &= (\sin^2\theta) z_{rr} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} z_{\theta r} \\ &\quad + \frac{\cos^2\theta}{r} z_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} z_{r\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2} z_\theta \end{aligned} \tag{23}$$

$$= (\sin^2\theta) z_{rr} + \frac{\cos^2\theta}{r} z_r + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} z_{r\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} z_{\theta\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} z_\theta \tag{24}$$

を得る．式 (15) と式 (24) の辺々を加え合わせて

$$z_{xx} + z_{yy} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) z_{rr} + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{r} z_r + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{r^2} z_{\theta\theta} \tag{25}$$

$$= z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} \tag{26}$$

を得る．式 (26) が答である．