微分積分 I 学期末試験問題 (建築建設工学科・材料開発工学科・生物応用化学科, 1999 年 7 月 30 日 5 限実施)

学科	平成　　年入学	学籍番号	氏名

1. $\sin\left(\mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の値を求めよ。

2. $(1+x)^{-1/2}$ にテーラーの公式を適用して x^3 に比例する項まで求めよ。剰余項は簡単に R_4 と書き表してよい。

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ を求めよ。

4. (i) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ を計算せよ。

(ii) dx, dy を $r, \theta, dr, d\theta$ で表せ。

5. 次式で定義される多項式 $H_n(x)(n=0,1,2,3,\cdots)$ を　Hermite の多項式と呼ぶ。

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

(i) 微分を実行して $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ の各々の具体的な形を求めよ。

(ii) 次式を証明せよ: $$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x^2})=x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})$$

(iii) 必要なら (ii) で証明した式を使って、次式を証明せよ: $$\frac{dH_n(x)}{dx}=2nH_{n-1}(x)$$

96人

微分積分 I 学期末試験問題 (建築建設工学科・材料開発工学科・生物応用化学科, 1999 年 7 月 30 日 5 限実施)

合計100点、

学科	平成　　年入学	学籍番号	氏名

[10] **1.** $\sin\left(\mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の値を求めよ。

$\theta = \mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}$ とおると　$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(0 \le \theta < \pi)$　$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

★ $\pm\frac{1}{2}$ は −2点、

★ $0<\theta<\pi$ の断りなしに $+\frac{1}{2}$ とする → 満点、

[20] **2.** $(1+x)^{-1/2}$ にテーラーの公式を適用して x^3 に比例する項まで求めよ。剰余項は簡単に R_4 と書き表してよい。

$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2} = \frac{3}{8}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{-\frac{5}{2}}{3} = \frac{3}{8}\cdot\frac{-\frac{5}{2}}{3} = -\frac{5}{16}$

$$\therefore (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + R_4$$

5　5　5　5

[20] **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

[5]+[5] = 10 **4.** (i) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ を計算せよ。

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta$$

[10] (ii) dx, dy を $r, \theta, dr, d\theta$ で表せ。

[5]+[5]

★ $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ の表式に各1点.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

5. 次式で定義される多項式 $H_n(x)(n = 0,1,2,3,\cdots)$ を　Hermite の多項式と呼ぶ。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

[3][3][4] (i) 微分を実行して $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ の各々の具体的な形を求めよ。

10

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2}(-2x)e^{-x^2} = \underline{2x}$$

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2}\frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{x^2}(-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2})$$

$$= \underline{4x^2 - 2}$$

$$H_3(x) = (-1)^3 e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{x^2}\frac{d}{dx}\{(4x^2-2)e^{-x^2}\} = -e^{x^2}\{8xe^{-x^2} + (4x^2-2)(-2x)e^{-x^2}\}$$

$$= -8x + 8x^3 - 4x = \underline{8x^3 - 12x}$$

[10] (ii) 次式を証明せよ: $\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x^2}) = x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})$

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x^2}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{d^k}{dx^k}x\right)\left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}e^{-x^2}\right)$$

$$= \binom{n}{0} x \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

$$= x\frac{d^n}{dx^2}e^{-x^2} + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

[10] (iii) 必要なら (ii) で証明した式を使って、次式を証明せよ: $\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\left\{e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\right\}$$

$$= (-1)^n\left\{2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\right\}$$

$$= (-1)^n\left\{2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2})\right\}$$

$$= (-1)^n\left[2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} - 2e^{x^2}\left\{x\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right\}\right]$$

$$= (-1)^n\left\{-2ne^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right\}$$

$$= 2n \cdot (-1)^{n-1}e^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

$$= 2n\,H_{n-1}(x)$$

5(ii) 数学的帰納法による証明
別解

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

$$(\text{右辺}) = x\frac{d}{dx}e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

$$= -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

$$\therefore\ (\text{左辺}) = (\text{右辺})$$

$n=k-1$ のとき 与式が成立するとする。即ち
$(\geqq 1)$

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(xe^{-x^2}) = x\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{-x^2} + (k-1)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}e^{-x^2}$$

このとき

$$\frac{d^k}{dx^k}(xe^{-x^2}) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{-x^2} + x\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2} + (k-1)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{-x^2}$$

$$= x\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2} + k\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{-x^2}$$

$\therefore$ $n=k$ のときも 与式が成立する