

微分・積分Ⅰ (材料開発工学科 年生) 小テスト (99/5/21)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ を求めよ。
2. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 1} (n \geq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の最初の何個かを数値的に計算して求めたところ、この数列は 1.618... くらいの値に収束するらしいことがわかった。そのあたりの値に収束すると仮定して、収束値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の正確な値を求めよ。
3. $y = \cos \frac{x}{2}$ のグラフを $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲について描け。
4. $\sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right)$ の値を求めよ。
5. $\operatorname{Arctanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$ を示せ。

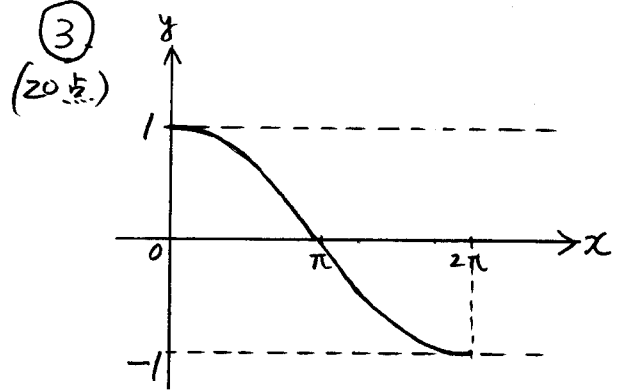
微分・積分Ⅰ (材料開発) 小テスト (99/5/21実施) の解答

① (20点) $\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n} \cdot (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$
 $= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$

② (仮定により) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とおくと.

② (20点) $a = 2 - \frac{1}{a+1}$
 $a^2 - a - 1 = 0$
 $\therefore a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a = 1.618\dots$ に近い a は $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



(注) 丸暗記した答えをそのまま書くのではなく、問題文に沿った答えをしよう。

④ (20点) $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ とおくと. $\cos \theta = \frac{3}{5} \therefore \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \frac{4}{5}$

また $\theta > 0$ (\arccos の値域は $[0, \pi]$) だから $\sin \theta > 0 \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}$

答. $\sin(\arccos \frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$

⑤ (20点) $y = \operatorname{arctanh} x$ とおくと. $x = \operatorname{tanh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, (-1 < x < 1)$
 $z = e^y$ とおくと. $e^{-y} = \frac{1}{z} \therefore x = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$
 $\therefore z^2 = \frac{1+x}{1-x} \therefore e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \therefore y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$

(注) $\operatorname{tanh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ とおくと. $\operatorname{arctanh} x = \frac{\operatorname{arcsinh} x}{\operatorname{arccosh} x}$ ではありません.
 また "arc" は切りはなして. $\operatorname{arctanh} x = \operatorname{arc}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$ などと書くのはダメです.

受験者数 92人

平均点 点 人

標準偏差 点 数

最高点 点

最低点 点

