

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま、全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。

[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】、【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。(マークシートには対応する記入欄を設けていない。)

[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には0を記入せよ。負符号(-)が必要なら、分子の左端の枠に入れよ。0を答えとするときの分母は1とせよ。

記入例： $2 = \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{2} = \frac{\boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{0} \boxed{1}}$ ,  $-3 = \boxed{-} \boxed{3} = \boxed{-} \boxed{0} \boxed{3} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{0} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} = \frac{\boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{0} \boxed{1}}$  +  $\boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}}$  に -3 を解答するには +  $\boxed{-} \boxed{3}$

[注意]  $\text{Sin}^{-1}x$  を  $\arcsin x$ ,  $\text{Cos}^{-1}x$  を  $\arccos x$ ,  $\text{Tan}^{-1}x$  を  $\arctan x$  と表記してもよい。

【1】 小問 i)~v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び、その番号で答えよ。ただし、 $a$  は正の定数とする。(2点×5問=10点)

i)  $\frac{d}{dx}x^x =$  (選択肢の  $\boxed{1}$  番)      選択肢：1:  $x^x$     2:  $x^x \log x$     3:  $x^x(\log x + 1)$     4:  $x^x e^x$     5:  $x^x(e^x + 1)$     6:  $x^x(e^x - 1)$

ii)  $\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x =$  (選択肢の  $\boxed{2}$  番)      選択肢：1:  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$     2:  $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$     3:  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$     4:  $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$     5:  $\frac{1}{1+x^2}$     6:  $\frac{-1}{1+x^2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$  (選択肢の  $\boxed{3}$  番)      選択肢：1:  $-1$     2:  $-\frac{1}{2}$     3:  $0$     4:  $\frac{1}{2}$     5:  $1$     6:  $\frac{3}{2}$

iv)  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2) =$  (選択肢の  $\boxed{4}$  番)  
 選択肢：1:  $x + y + y^2$     2:  $2x + y + y^2$     3:  $2x + y + 2y$     4:  $2x$     5:  $x + y$     6:  $2x + y$

v)  $e^x =$  (選択肢の  $\boxed{5}$  番) +  $o(x^2)$   
 選択肢：1:  $1 + \frac{1}{2}x^2$     2:  $1 - \frac{1}{2}x^2$     3:  $x + \frac{1}{2}x^2$     4:  $x - \frac{1}{2}x^2$     5:  $1 + x + \frac{1}{2}x^2$     6:  $1 - x + \frac{1}{2}x^2$

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 物質生命化  
科 学科

学籍  
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏  
名

(第 1 頁目)  
得  
点      /10

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第2頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】 小問 i)~x) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(6点×4問=24点。第3~4頁に続く。)

$$i) \cos\left(\sin^{-1}\frac{12}{13}\right) = \frac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}\boxed{9}}$$

$$ii) \frac{d^3}{dx^3}e^{x^3} = \left(\boxed{10}\boxed{11}x^6 + \boxed{12}\boxed{13}x^3 + \boxed{14}\boxed{15}\right)e^{x^3}$$

$$iii) \frac{d^n}{dx^n}x^2e^x = e^x\left(x^2 + \boxed{16}\boxed{17}nx + \boxed{18}\boxed{19}n^2 + \boxed{20}\boxed{21}n + \boxed{22}\boxed{23}\right)$$

$$iv) e^{-3x} = \boxed{24}\boxed{25} + \boxed{26}\boxed{27}x + \frac{\boxed{28}\boxed{29}}{\boxed{30}}x^2 + o(x^2)$$

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 科 物質生命化  
科 学 科

(第 2 頁目)  
得点 /24

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第3頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】(第2頁からのつづき。6点×3問=18点)

$$v) x(1+x)^{1/3} = \boxed{31}\boxed{32} + \boxed{33}\boxed{34}x + \frac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}}x^2 + o(x^2)$$

$$vi) e^{5x} \cos x = \boxed{38}\boxed{39} + \boxed{40}\boxed{41}x + \boxed{42}\boxed{43}x^2 + o(x^2)$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{x}{2-x}} = e^{\boxed{44}\boxed{45}}$$

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 29 年 8 月 4 日	出題者: 田嶋・井上	学 科 物質生命化 科 学 科	学 籍 番 号 	氏 名 	得 点 /18
--------------------------	----------------------------	---------------	--------------------	-------------	---------	------------

(第3頁目)

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第4頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】(第3頁からのつづき。6点×3問=18点)

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x(\sin x - x)} = \frac{\boxed{46} \boxed{47}}{\boxed{48}}$$

ix) 曲面  $z = x^2y^3$  の  $(x, y) = (2, 1)$  での接平面の方程式は  $z = \boxed{49} \boxed{50} \boxed{51} x + \boxed{52} \boxed{53} \boxed{54} y + \boxed{55} \boxed{56} \boxed{57}$  である。

x)  $z = x^2y^3$  のとき  $z_{xx} + z_{xy} + z_{yx} + z_{yy} = \boxed{58} \boxed{59} x^3 + \boxed{60} \boxed{61} x^2y + \boxed{62} \boxed{63} xy^2 + \boxed{64} \boxed{65} y^3$

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第5頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【3】 下記の小問(1),(2)に答えよ。(合計15点)

(1)  $z = \sin(x^2y^3)$ ,  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  のとき、 $\frac{dz}{dt}$  を  $x, y, f'(t), g'(t)$  を用いて表せ。(8点)

(2)  $z = \sin(x^2y^3)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$  のとき、 $\frac{dz}{dt}$  を  $t$  を用いて表す式を、前小問(1)の答の式を使って求めよ。(7点)

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 物質生命化  
科 学科

学  
籍  
番  
号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏  
名

得  
点

(第 5 頁目)

/15

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第6頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【4】  $z = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  のとき、 $z_x^2 + z_y^2$  を  $z_r$ ,  $z_\theta$ ,  $r$ ,  $\theta$  のうち必要なものを用いて表せ。(15点)

[補足説明]  $z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ,  $z_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ,  $z_r = \frac{\partial f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial r}$ ,  $z_\theta = \frac{\partial f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial \theta}$ .

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 物質生命化  
科 学科

得点 /15 (第6頁目)

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま、全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。

[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】、【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。(マークシートには対応する記入欄を設けていない。)

[数値のマークの仕方] 分数は約分可能な必ず約分せよ。余分な桁には0を記入せよ。負符号(-)が必要なら、分子の左端の枠に入れよ。0を答えとするときの分母は1とせよ。

記入例:  $2 = \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{2} = \frac{\boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{0} \boxed{1}}$ ,  $-3 = \boxed{-} \boxed{3} = \boxed{-} \boxed{0} \boxed{3} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{0} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} = \frac{\boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{0} \boxed{1}}$  +  $\boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}}$  に -3 を解答するには +  $\boxed{-} \boxed{3}$

[注意]  $\text{Sin}^{-1}x$  を  $\arcsin x$ ,  $\text{Cos}^{-1}x$  を  $\arccos x$ ,  $\text{Tan}^{-1}x$  を  $\arctan x$  と表記してもよい。

【1】 小問 i)~v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び、その番号で答えよ。ただし、 $a$  は正の定数とする。(2点×5問=10点)

i)  $\frac{d}{dx}x^x =$  (選択肢の  $\boxed{1: 3}$  番)      選択肢: 1:  $x^x$     2:  $x^x \log x$     3:  $x^x(\log x + 1)$     4:  $x^x e^x$     5:  $x^x(e^x + 1)$     6:  $x^x(e^x - 1)$

ii)  $\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x =$  (選択肢の  $\boxed{2: 4}$  番)      選択肢: 1:  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$     2:  $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$     3:  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$     4:  $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$     5:  $\frac{1}{1+x^2}$     6:  $\frac{-1}{1+x^2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$  (選択肢の  $\boxed{3: 2}$  番)      選択肢: 1:  $-1$     2:  $-\frac{1}{2}$     3:  $0$     4:  $\frac{1}{2}$     5:  $1$     6:  $\frac{3}{2}$

iv)  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2) =$  (選択肢の  $\boxed{4: 6}$  番)

選択肢: 1:  $x + y + y^2$     2:  $2x + y + y^2$     3:  $2x + y + 2y$     4:  $2x$     5:  $x + y$     6:  $2x + y$

v)  $e^x =$  (選択肢の  $\boxed{5: 5}$  番) +  $o(x^2)$

選択肢: 1:  $1 + \frac{1}{2}x^2$     2:  $1 - \frac{1}{2}x^2$     3:  $x + \frac{1}{2}x^2$     4:  $x - \frac{1}{2}x^2$     5:  $1 + x + \frac{1}{2}x^2$     6:  $1 - x + \frac{1}{2}x^2$

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 29 年 8 月 4 日	出題者: 田嶋・井上	学 物質生命化 科 学科	学籍 番号	氏 名	得 点 <div style="text-align: right;">(第1頁目) /10</div>
--------------------------	----------------------------	---------------	-----------------	----------	--------	--

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第2頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】 小問 i)~x) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(6点×4問=24点。第3~4頁に続く。)

$$i) \cos\left(\sin^{-1}\frac{12}{13}\right) = \frac{\boxed{6:0} \boxed{7:5}}{\boxed{8:1} \boxed{9:3}}$$

$$ii) \frac{d^3}{dx^3} e^{x^3} = \left( \boxed{10:2} \boxed{11:7} x^6 + \boxed{12:5} \boxed{13:4} x^3 + \boxed{14:0} \boxed{15:6} \right) e^{x^3}$$

$$iii) \frac{d^n}{dx^n} x^2 e^x = e^x \left( x^2 + \boxed{16:0} \boxed{17:2} nx + \boxed{18:0} \boxed{19:1} n^2 + \boxed{20:-} \boxed{21:1} n + \boxed{22:0} \boxed{23:0} \right)$$

$$iv) e^{-3x} = \boxed{24:0} \boxed{25:1} + \boxed{26:-} \boxed{27:3} x + \frac{\boxed{28:0} \boxed{29:9}}{\boxed{30:2}} x^2 + o(x^2)$$

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 科 物質生命化  
学 科 学科

(第 2 頁目)  
得点 /24



# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第3頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】(第2頁からのつづき。6点×3問=18点)

$$v) x(1+x)^{1/3} = \boxed{31: 0} \boxed{32: 0} + \boxed{33: 0} \boxed{34: 1} x + \frac{\boxed{35: 0} \boxed{36: 1}}{\boxed{37: 3}} x^2 + o(x^2)$$

$$vi) e^{5x} \cos x = \boxed{38: 0} \boxed{39: 1} + \boxed{40: 0} \boxed{41: 5} x + \boxed{42: 1} \boxed{43: 2} x^2 + o(x^2)$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{x}{2-x}} = e^{\boxed{44: -} \boxed{45: 2}}$$

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 科 物質生命化  
学 科 学科

学籍  
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏  
名

--

得  
点

	/18
--	-----

(第 3 頁目)

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第4頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

【2】(第3頁からのつづき。6点×3問=18点)

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x(\sin x - x)} = \frac{\boxed{46: -} \boxed{47: 1}}{\boxed{48: 4}}$$

ix) 曲面  $z = x^2y^3$  の  $(x, y) = (2, 1)$  での接平面の方程式は  $z = \boxed{49: 0} \boxed{50: 0} \boxed{51: 4} x + \boxed{52: 0} \boxed{53: 1} \boxed{54: 2} y + \boxed{55: -} \boxed{56: 1} \boxed{57: 6}$  である。

$$\text{x) } z = x^2y^3 \text{ のとき } z_{xx} + z_{xy} + z_{yx} + z_{yy} = \boxed{58: 0} \boxed{59: 0} x^3 + \boxed{60: 0} \boxed{61: 6} x^2y + \boxed{62: 1} \boxed{63: 2} xy^2 + \boxed{64: 0} \boxed{65: 2} y^3$$

科目名:  
微分積分 I  
(定期試験)

試験日:  
平成 29 年  
8 月 4 日

出題者:  
田嶋・井上

学 物質生命化  
科 学科

(第4頁目)  
得点 /18

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第5頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

[3] 下記の小問(1),(2)に答えよ。(合計15点)

(1)  $z = \sin(x^2y^3)$ ,  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  のとき、 $\frac{dz}{dt}$  を  $x, y, f'(t), g'(t)$  を用いて表せ。(8点)

解答例

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy^3 \cos(x^2y^3)f'(t) + 3x^2y^2 \cos(x^2y^3)g'(t) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[採点基準]

$\frac{dx}{dt}$  と書くべき項を  $\frac{\partial x}{\partial t}$  と書いたり,  $\frac{dy}{dt}$  と書くべき項を  $\frac{\partial y}{\partial t}$  と書いたら, 1点減点。

$\frac{\partial z}{\partial x}$  と書くべき項を  $\frac{dz}{dx}$  と書いたり,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  と書くべき項を  $\frac{dz}{dy}$  と書いたら, 1点減点。

(2)  $z = \sin(x^2y^3)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$  のとき、 $\frac{dz}{dt}$  を  $t$  を用いて表す式を、前小問(1)の答の式を使って求めよ。(7点)

解答例

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 2e^t e^{-3t} \cos(e^{2t} e^{-3t})e^t + 3e^{2t} e^{-2t} \cos(e^{2t} e^{-3t})(-e^{-t}) \\ &= 2e^{-t} \cos(e^{-t}) - 3e^{-t} \cos(e^{-t}) \\ &= -e^{-t} \cos(e^{-t}) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[採点基準]: 前小問の答を使わず、代入してから微分した場合、即ち、

$z = \sin(e^{-t})$  を微分して  $\frac{dz}{dt} = -e^{-t} \cos(e^{-t})$  を得た答案は、1点減点して6点までとする。

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 29 年 8 月 4 日	出題者: 田嶋・井上	学 科 物 質 生 命 化 学 科	学 籍 番 号	氏 名	(第 5 頁目) 得 点 /15
--------------------------	----------------------------	---------------	-------------------------	---------	-----	------------------------

# 微分積分 I (a,b) 定期試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第6頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年8月4日2限実施

[4]  $z = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  のとき、 $z_x^2 + z_y^2$  を  $z_r, z_\theta, r, \theta$  のうち必要なものを用いて表せ。(15点)

[補足説明]  $z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ,  $z_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ,  $z_r = \frac{\partial f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial r}$ ,  $z_\theta = \frac{\partial f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial \theta}$ .

解答例

$$\begin{cases} z_r = x_r z_x + y_r z_y \\ z_\theta = x_\theta z_x + y_\theta z_y \end{cases} \quad (\text{ここ迄で4点})$$

$$\begin{cases} z_r = \cos \theta z_x + \sin \theta z_y \\ z_\theta = -r \sin \theta z_x + r \cos \theta z_y \end{cases} \quad (\text{ここ迄で8点})$$

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} \quad (\text{ここ迄で12点})$$

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= \left( \cos \theta z_r - \frac{\sin \theta}{r} z_\theta \right)^2 + \left( \sin \theta z_r + \frac{\cos \theta}{r} z_\theta \right)^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) z_r^2 + 2 \left( -\frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \right) z_r z_\theta + \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r^2} z_\theta^2 \\ &= z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 \quad (\text{答}) \quad (\text{ここ迄で15点}) \end{aligned}$$

[別解法]

$$\begin{cases} z_r = x_r z_x + y_r z_y \\ z_\theta = x_\theta z_x + y_\theta z_y \end{cases} \quad (\text{ここ迄で4点})$$

$$\begin{cases} z_r = \cos \theta z_x + \sin \theta z_y \\ z_\theta = -r \sin \theta z_x + r \cos \theta z_y \end{cases} \quad (\text{ここ迄で8点})$$

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 \quad (\text{ここ迄で12点})$$

$$\begin{aligned} &= (\cos \theta z_x + \sin \theta z_y)^2 + \frac{1}{r^2} (-r \sin \theta z_x + r \cos \theta z_y)^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) z_x^2 + 2(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) z_x z_y + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) z_y^2 \\ &= z_x^2 + z_y^2 \quad (\text{ここ迄で15点}) \\ \therefore z_x^2 + z_y^2 &= z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$