

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま、全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。

[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】～【5】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。(マークシートには対応する記入欄を設けていない。)

[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には0を記入せよ。負符号(-)が必要なら、分子の左端の枠に入れよ。0を答とするときの分母は1とせよ。

記入例: $2 = \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{2} = \frac{\boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{0} \boxed{1}}$, $-3 = \boxed{-} \boxed{3} = \boxed{-} \boxed{0} \boxed{3} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{0} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} = \frac{\boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{0} \boxed{1}}$ + $\boxed{} \boxed{}$ に -3 を解答するには + $\boxed{-} \boxed{3}$

[注意] $\text{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\text{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\text{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)~v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び、その番号で答えよ。ただし、 a は正の定数とする。(2点×5問=10点)

i) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{a}} =$ (選択肢の $\boxed{1}$ 番) 選択肢: 1: $ax^{\frac{a-1}{a}}$ 2: $\frac{1}{a}x^{\frac{a-1}{a}}$ 3: $\frac{1}{a^2}x^{\frac{a-1}{a}}$ 4: $ax^{\frac{1-a}{a}}$ 5: $\frac{1}{a}x^{\frac{1-a}{a}}$ 6: $\frac{1}{a^2}x^{\frac{1-a}{a}}$

ii) $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^a} =$ (選択肢の $\boxed{2}$ 番) 選択肢: 1: $-\frac{a}{x^{a-1}}$ 2: $-\frac{a}{x^a}$ 3: $-\frac{a}{x^{a+1}}$ 4: $\frac{a}{x^{a-1}}$ 5: $\frac{a}{x^a}$ 6: $\frac{a}{x^{a+1}}$

iii) $\frac{d}{dx} \log \frac{a}{x} =$ (選択肢の $\boxed{3}$ 番) 選択肢: 1: $-\frac{1}{ax}$ 2: $-\frac{1}{x}$ 3: $-\frac{a}{x}$ 4: $\frac{x}{a}$ 5: x 6: ax

iv) $\frac{d}{dx} \sin ax =$ (選択肢の $\boxed{4}$ 番) 選択肢: 1: $a \sin ax$ 2: $\sin ax$ 3: $-a \sin ax$ 4: $a \cos ax$ 5: $\cos ax$ 6: $-a \cos ax$

v) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x} =$ (選択肢の $\boxed{5}$ 番) 選択肢: 1: $\cos^2 x$ 2: $\frac{1}{\cos^2 x}$ 3: $-\frac{1}{\cos^2 x}$ 4: $\sin^2 x$ 5: $\frac{1}{\sin^2 x}$ 6: $-\frac{1}{\sin^2 x}$

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏
名

--

得
点

/10

(第1頁目)

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第2頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】 小問 i)~xii) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5点×4問=20点。第3~4頁に続く。)

$$i) \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}}\pi$$

$$ii) \tan\left(\sin^{-1}\frac{40}{41}\right) = \frac{\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}}{\boxed{12}\boxed{13}}$$

$$iii) \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}}{\boxed{17}\boxed{18}}$$

$$iv) \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x^3(x+1)^5}{(x+2)^7(x+3)^9}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^3(x+1)^5}{(x+2)^7(x+3)^9}} \left(\frac{\boxed{19}\boxed{20}}{x} + \frac{\boxed{21}\boxed{22}}{x+1} + \frac{\boxed{23}\boxed{24}}{x+2} + \frac{\boxed{25}\boxed{26}}{x+3} \right)$$

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏
名

(第2頁目)
得
点 /20

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第3頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】(第2頁からのつづき。5点×4問=20点)

$$v) \frac{d}{dx} \text{Sin}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\boxed{27} \boxed{28} x + \boxed{29} \boxed{30}}{x^2 + \boxed{31} \boxed{32} x + \boxed{33} \boxed{34}}$$

$$vi) \frac{d^{100}}{dx^{100}} x^2 e^x = \left(\boxed{35} \boxed{36} x^2 + \boxed{37} \boxed{38} \boxed{39} x + \boxed{40} \boxed{41} \boxed{42} \boxed{43} \right) e^x$$

$$vii) \frac{d^8}{dx^8} x^2 \sin x = \left(\boxed{44} \boxed{45} x^2 + \boxed{46} \boxed{47} \boxed{48} x + \boxed{49} \boxed{50} \boxed{51} \right) \sin x \\ + \left(\boxed{52} \boxed{53} x^2 + \boxed{54} \boxed{55} \boxed{56} x + \boxed{57} \boxed{58} \boxed{59} \right) \cos x$$

$$viii) \text{ 曲線 } y = \frac{1}{(\text{Tan}^{-1} x)^2} \text{ の } x = 1 \text{ での接線の方程式は } y = \frac{\boxed{60} \boxed{61} \boxed{62}}{\pi^3} (x - 1) + \frac{\boxed{63} \boxed{64} \boxed{65}}{\pi^2} \text{ である。}$$

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 29 年 6 月 30 日	出題者: 田嶋・井上	学 物質生命化 科 学科	学籍 番号 <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>											氏 名	得 点 /20

(第3頁目)

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第4頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】(第3頁からのつづき。5点×4問=20点)

ix) 曲線 $y = (x+2)^{x+1}$ の $x=0$ での接線の方程式は $y = (\boxed{66}\boxed{67} \log 2 + \boxed{68}\boxed{69})x + \boxed{70}\boxed{71}$ である。

x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\log(\cos x)} = \frac{\boxed{72}\boxed{73}}{\boxed{74}} \log 3 + \frac{\boxed{75}\boxed{76}}{\boxed{77}}$ (補足説明: 3^{x^2} は「3のx乗の2乗」ではなく「3の x^2 乗」)

xi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^x}{x^3 - 8} = \frac{\boxed{78}\boxed{79}}{\boxed{80}} \log 2 + \frac{\boxed{81}\boxed{82}}{\boxed{83}}$

xii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{5x} = e^{\boxed{84}\boxed{85}\boxed{86}}$

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏
名

(第4頁目)
得
点 /20

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第5頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【3】 xy 平面上の曲線 C を下記のパラメータ表示で定義する。曲線 C は点 $P\left(x=0, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通過することが示せる。曲線 C の点 P における接線の方程式を求めよ。(10点)

$$C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

【4】 $y = \sin(\sin x)$ とするとき, 下記の小問 i), ii) に答えよ。(5点)

i) $y' = \frac{dy}{dx}$ を求めよ。

ii) $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

3個の関数 f, g, h に $f' = g, g' = h$ という関係が成り立つとき, $z = f(f(x))$ について, 下記の小問 iii), iv) に答えよ。(5点)

iii) $z' = \frac{dz}{dx}$ を, f, g, x を用いて表せ。最終的な答の式は $f', f'', g', g'', \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ を含んではならない。

iv) $z'' = \frac{d^2z}{dx^2}$ を, f, g, h, x を用いて表せ。最終的な答の式は $f', f'', g', g'', h', h'', \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ を含んではならない。

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 29 年 6 月 30 日	出題者: 田嶋・井上	学 科 物質生命化 科 学 科	学 籍 番 号 	氏 名	得 点 <div style="text-align: right; font-size: 1.2em;">/20</div>
--------------------------	-----------------------------	---------------	--------------------	-------------	-----	--

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第6頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【5】以下の小問 i), ii) に答えよ。最終的な答の式中には、階乗記号「!」は使ってよいが、項の省略を表す記号の「…」は使ってはならない。例えば、 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ は $n!$ と書き表し、 $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-n)$ は $(-1)^n n!$ と書き表せ。(10点)

i) $y = \log(1 - 2x)$, $n \geq 1$ とする。 $y^{(n)}$ を求めよ。

ii) $z = x \log(1 - 2x)$, $n \geq 2$ とする。 $z^{(n)}$ を求めよ。

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏
名

得
点

(第 6 頁目)

/10

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートです。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま、全ての配布物を提出すること。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。

[答え方] 大問【1】は選択肢の番号をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【3】～【5】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。(マークシートには対応する記入欄を設けていない。)

[数値のマークの仕方] 分数は約分可能な必ず約分せよ。余分な桁には0を記入せよ。負符号(-)が必要ななら、分子の左端の枠に入れよ。0を答えとするときの分母は1とせよ。

記入例: $2 = \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{2} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{2} = \frac{\boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{2}}{\boxed{0} \boxed{1}}$, $-3 = \boxed{-} \boxed{3} = \boxed{-} \boxed{0} \boxed{3} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}} = \frac{\boxed{-} \boxed{0} \boxed{3}}{\boxed{0} \boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} = \frac{\boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{1}} = \frac{\boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}}{\boxed{0} \boxed{1}}$ + $\boxed{} \boxed{}$ に -3 を解答するには + $\boxed{-} \boxed{3}$

[注意] $\text{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\text{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\text{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)~v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び、その番号で答えよ。ただし、 a は正の定数とする。(2点×5問=10点)

i) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{a}} =$ (選択肢の $\boxed{1: 5}$ 番) 選択肢: 1: $ax^{\frac{a-1}{a}}$ 2: $\frac{1}{a}x^{\frac{a-1}{a}}$ 3: $\frac{1}{a^2}x^{\frac{a-1}{a}}$ 4: $ax^{\frac{1-a}{a}}$ 5: $\frac{1}{a}x^{\frac{1-a}{a}}$ 6: $\frac{1}{a^2}x^{\frac{1-a}{a}}$

ii) $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^a} =$ (選択肢の $\boxed{2: 3}$ 番) 選択肢: 1: $-\frac{a}{x^{a-1}}$ 2: $-\frac{a}{x^a}$ 3: $-\frac{a}{x^{a+1}}$ 4: $\frac{a}{x^{a-1}}$ 5: $\frac{a}{x^a}$ 6: $\frac{a}{x^{a+1}}$

iii) $\frac{d}{dx} \log \frac{a}{x} =$ (選択肢の $\boxed{3: 2}$ 番) 選択肢: 1: $-\frac{1}{ax}$ 2: $-\frac{1}{x}$ 3: $-\frac{a}{x}$ 4: $\frac{x}{a}$ 5: x 6: ax

iv) $\frac{d}{dx} \sin ax =$ (選択肢の $\boxed{4: 4}$ 番) 選択肢: 1: $a \sin ax$ 2: $\sin ax$ 3: $-a \sin ax$ 4: $a \cos ax$ 5: $\cos ax$ 6: $-a \cos ax$

v) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x} =$ (選択肢の $\boxed{5: 6}$ 番) 選択肢: 1: $\cos^2 x$ 2: $\frac{1}{\cos^2 x}$ 3: $-\frac{1}{\cos^2 x}$ 4: $\sin^2 x$ 5: $\frac{1}{\sin^2 x}$ 6: $-\frac{1}{\sin^2 x}$

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--

氏
名

--

得
点

	/10
--	-----

(第1頁目)

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第2頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】 小問 i)~xii) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5点×4問=20点。第3~4頁に続く。)

$$i) \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\boxed{6: 0} \boxed{7: 5}}{\boxed{8: 6}} \pi$$

$$ii) \tan\left(\sin^{-1}\frac{40}{41}\right) = \frac{\boxed{9: 0} \boxed{10: 4} \boxed{11: 0}}{\boxed{12: 0} \boxed{13: 9}}$$

$$iii) \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{\boxed{14: 0} \boxed{15: 0} \boxed{16: 7}}{\boxed{17: 2} \boxed{18: 5}}$$

$$iv) \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x^3(x+1)^5}{(x+2)^7(x+3)^9}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^3(x+1)^5}{(x+2)^7(x+3)^9}} \left(\frac{\boxed{19: 0} \boxed{20: 3}}{x} + \frac{\boxed{21: 0} \boxed{22: 5}}{x+1} + \frac{\boxed{23: -} \boxed{24: 7}}{x+2} + \frac{\boxed{25: -} \boxed{26: 9}}{x+3} \right)$$

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 29 年 6 月 30 日	出題者: 田嶋・井上	学 物質生命化 科 学科	学籍 番号					氏 名	得 点	(第2頁目) /20
--------------------------	-----------------------------	---------------	-----------------	----------	--	--	--	--	--------	--------	---------------

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第3頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】(第2頁からのつづき。5点×4問=20点)

$$v) \frac{d}{dx} \text{Sin}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\boxed{27: 0} \boxed{28: 0} x + \boxed{29: 0} \boxed{30: 3}}{x^2 + \boxed{31: 0} \boxed{32: 0} x + \boxed{33: 0} \boxed{34: 9}}$$

$$vi) \frac{d^{100}}{dx^{100}} x^2 e^x = \left(\boxed{35: 0} \boxed{36: 1} x^2 + \boxed{37: 2} \boxed{38: 0} \boxed{39: 0} x + \boxed{40: 9} \boxed{41: 9} \boxed{42: 0} \boxed{43: 0} \right) e^x$$

$$vii) \frac{d^8}{dx^8} x^2 \sin x = \left(\boxed{44: 0} \boxed{45: 1} x^2 + \boxed{46: 0} \boxed{47: 0} \boxed{48: 0} x + \boxed{49: -} \boxed{50: 5} \boxed{51: 6} \right) \sin x \\ + \left(\boxed{52: 0} \boxed{53: 0} x^2 + \boxed{54: -} \boxed{55: 1} \boxed{56: 6} x + \boxed{57: 0} \boxed{58: 0} \boxed{59: 0} \right) \cos x$$

$$viii) \text{ 曲線 } y = \frac{1}{(\text{Tan}^{-1} x)^2} \text{ の } x = 1 \text{ での接線の方程式は } y = \frac{\boxed{60: -} \boxed{61: 6} \boxed{62: 4}}{\pi^3} (x - 1) + \frac{\boxed{63: 0} \boxed{64: 1} \boxed{65: 6}}{\pi^2} \text{ である。}$$

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第4頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

【2】(第3頁からのつづき。5点×4問=20点)

ix) 曲線 $y = (x+2)^{x+1}$ の $x=0$ での接線の方程式は $y = \left(\boxed{66: 0} \boxed{67: 2} \log 2 + \boxed{68: 0} \boxed{69: 1} \right) x + \boxed{70: 0} \boxed{71: 2}$ である。

x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\log(\cos x)} = \frac{\boxed{72: -} \boxed{73: 2}}{\boxed{74: 1}} \log 3 + \frac{\boxed{75: 0} \boxed{76: 0}}{\boxed{77: 1}}$ (補足説明: 3^{x^2} は「3のx乗の2乗」ではなく「3の x^2 乗」)

xi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^x}{x^3 - 8} = \frac{\boxed{78: -} \boxed{79: 1}}{\boxed{80: 3}} \log 2 + \frac{\boxed{81: 0} \boxed{82: 1}}{\boxed{83: 3}}$

xii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{5x} = e^{\boxed{84: -} \boxed{85: 2} \boxed{86: 0}}$

科目名:
微分積分 I
(中間試験)

試験日:
平成 29 年
6 月 30 日

出題者:
田嶋・井上

学 物質生命化
科 学科

学籍
番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏
名

(第4頁目)
得
点 /20

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第5頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

[3] xy 平面上の曲線 C を下記のパラメータ表示で定義する。曲線 C は点 $P\left(x=0, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通過することが示せる。曲線 C の点 P における接線の方程式を求めよ。(10点)

$$C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

解答例

点 P に対応する t の値は,

$$x = \cos 2t = 0, \quad -\pi \leq 2t \leq \pi \text{ より, } 2t = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ 即ち, } t = \pm\frac{\pi}{4}.$$

$$y = \sin 3t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq 3t \leq \frac{3\pi}{2} \text{ より, } 3t = -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \text{ 即ち, } t = -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}.$$

ゆえに, $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \cos 3t}{-2 \sin 2t} \text{ の点 } P \text{ に於ける値は}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{3 \cos \frac{3\pi}{4}}{-2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{3}{\sqrt{2}}}{-2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{点 } P \text{ に於ける接線の方程式は } y = \frac{3}{2\sqrt{2}}(x-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{即ち, } y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (答)}$$

[4] $y = \sin(\sin x)$ とするとき, 下記の小問 i), ii) に答えよ。(5点)

i) $y' = \frac{dy}{dx}$ を求めよ。

ii) $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

3個の関数 f, g, h に $f' = g, g' = h$ という関係が成り立つとき, $z = f(f(x))$ について, 下記の小問 iii), iv) に答えよ。(5点)

iii) $z' = \frac{dz}{dx}$ を, f, g, x を用いて表せ。最終的な答の式は $f', f'', g', g'', \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ を含んではならない。

iv) $z'' = \frac{d^2z}{dx^2}$ を, f, g, h, x を用いて表せ。最終的な答の式は $f', f'', g', g'', h', h'', \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ を含んではならない。

解答例

i) $u = \sin x$ とおくと $y = \sin u$ なので, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos u \cos x = \cos(\sin x) \cos x$

$\therefore y' = \cos x \cos(\sin x)$ (答)

ii) $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos u \cos x) = \frac{d(\cos u)}{du} \frac{du}{dx} \cos x + \cos u \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin u \cos^2 x + \cos u(-\sin x)$

$= -\sin(\sin x) \cos^2 x - \cos(\sin x) \sin x$

$\therefore y'' = -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x)$ (答)

iii) $u = f(x)$ とおくと $z = f(u)$ なので $z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(f(u))}{du} \frac{d(f(x))}{dx} = f'(u)f'(x) = g(u)g(x) = g(f(x))g(x)$

$\therefore z' = g(x)g(f(x))$ (答)

iv) $z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{d}{dx}(g(u)g(x)) = \frac{dg(u)}{du} \frac{du}{dx} g(x) + g(u) \frac{d(g(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du} \frac{du}{dx} g(x) + g(u)g'(x) = g'(u) \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + g(u)h(x)$

$= h(u)f'(x)g(x) + g(u)h(x) = h(u)g(x)g(x) + g(u)h(x) = h(f(x))g(x)^2 + g(f(x))h(x)$

$\therefore z'' = h(x)g(f(x)) + g(x)^2h(f(x))$ (答)

微分積分 I (a,b) 中間試験 問題・答案用紙 (全6頁中の第6頁目)

福井大学工学部 物質生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・井上, 2017年6月30日2限実施

[5] 以下の小問 i), ii) に答えよ。最終的な答の式中には、階乗記号「!」は使ってよいが、項の省略を表す記号の「…」は使ってはならない。例えば、 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ は $n!$ と書き表し、 $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-n)$ は $(-1)^n n!$ と書き表せ。(10点)

i) $y = \log(1 - 2x)$, $n \geq 1$ とする。 $y^{(n)}$ を求めよ。

ii) $z = x \log(1 - 2x)$, $n \geq 2$ とする。 $z^{(n)}$ を求めよ。

解答例

i) $y = \log(1 - 2x)$

$$y^{(1)} = \frac{d(\log(1-2x))}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} = \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = -2^1 \cdot 0! \cdot (1-2x)^{-1}$$

$$y^{(2)} = -2^1 \cdot 0! \cdot \frac{d((1-2x)^{-1})}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} = -2^1 \cdot 0! \cdot (-1)(1-2x)^{-2} \cdot (-2) = -2^1 \cdot 2 \cdot 0! \cdot 1 \cdot (1-2x)^{-2} = -2^2 \cdot 1! \cdot (1-2x)^{-2}$$

$$y^{(3)} = -2^2 \cdot 1! \cdot \frac{d((1-2x)^{-2})}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} = -2^2 \cdot 1! \cdot (-2)(1-2x)^{-3} \cdot (-2) = -2^2 \cdot 2 \cdot 1! \cdot 2 \cdot (1-2x)^{-3} = -2^3 \cdot 2! \cdot (1-2x)^{-3}$$

$$y^{(4)} = -2^3 \cdot 2! \cdot \frac{d((1-2x)^{-3})}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} = -2^3 \cdot 2! \cdot (-3)(1-2x)^{-4} \cdot (-2) = -2^3 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 3 \cdot (1-2x)^{-4} = -2^4 \cdot 3! \cdot (1-2x)^{-4}$$

$$y^{(5)} = -2^4 \cdot 3! \cdot \frac{d((1-2x)^{-4})}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} = -2^4 \cdot 3! \cdot (-4)(1-2x)^{-5} \cdot (-2) = -2^4 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 4 \cdot (1-2x)^{-5} = -2^5 \cdot 4! \cdot (1-2x)^{-5}$$

ゆえに一般項は下記のように推論される。

$$y^{(n)} = -\frac{2^n (n-1)!}{(1-2x)^n} \quad (n \geq 1) \text{ (答)}$$

上記の推論が $n > 5$ でも成立することは下記に示した数学的帰納法によって証明できるが、

本試験の採点に際しては、答案に証明が書かれていなくても減点しない。

k を正の整数として $n = k$ のとき上記の推論が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{d}{dx} y^{(k)} = -2^k (k-1)! \frac{d}{dx} (1-2x)^{-k} = -2^k (k-1)! \frac{d((1-2x)^{-k})}{d(1-2x)} \frac{d(1-2x)}{dx} \\ &= -2^k (k-1)! (-k) \cdot (1-2x)^{-(k+1)} \cdot (-2) = -2^k \cdot 2 \cdot (k-1)! \cdot k \cdot (1-2x)^{-(k+1)} = -2^{k+1} k! (1-2x)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

従って上記の推論は $n = k+1$ のときも成立する。これと、上記の推論が $n = 1$ のときに成立することから、数学的帰納法により上記の推論は n が 1 以上の全ての整数で成立することが結論される。

ii)

ライプニッツの公式により $z^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$.

$n \geq 1$ のとき

$$z^{(n)} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)} = \binom{n}{0} x y^{(n)} + \binom{n}{1} y^{(n-1)} = x y^{(n)} + n y^{(n-1)}$$

$n \geq 2$ のとき $y^{(n)}$ と $y^{(n-1)}$ の双方が前小問の答で表せるので、

$$z^{(n)} = -\frac{2^n (n-1)!}{(1-2x)^n} x - n \frac{2^{n-1} (n-2)!}{(1-2x)^{n-1}} = -\frac{2^{n-1} (n-2)!}{(1-2x)^n} \{2(n-1)x + n(1-2x)\} = -\frac{2^{n-1} (n-2)! (n-2x)}{(1-2x)^n}$$

$$\therefore z^{(n)} = -\frac{2^{n-1} (n-2)! (n-2x)}{(1-2x)^n} \quad (n \geq 2)$$