微分積分 I　定期試験　問題・答案用紙　（全３頁中の第１頁）

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 １年生対象, 担当教員 田嶋・橋本・保倉・古閑,　2015 年 7 月 31 日 2 限実施

注意：逆三角関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ は, それぞれ, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と表記してもよい。

$\boxed{1}$ 下記の小問に示した関数 $f(x)$ の１次導関数 (１階導関数) を求めよ。(5 点× 3 問=15 点)

(1) $f(x) = \sqrt{\cos\, x}$　(2) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{1+x}$　(3) $f(x) = (2x)^{3x}$

$\boxed{2}$ 以下の小問に示した極限を求めよ。(5 点× 2 問=10 点)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1+x+\frac{1}{2}x^2-e^x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{3}$ 以下の小問に示した数式の値を求めよ。(5 点+10 点=15 点)

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(2) $\cos\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{2}+\mathrm{Cos}^{-1}\,\frac{1}{3}\right)$

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 27 年 7 月 31 日	出題者: 田嶋・橋本 保倉・古閑	学 科	学籍番号								氏 名	第 1 頁目得点 (40 点)

得点合計 (100 点満点)：

$\boxed{4}$ $n \geq 2$ のとき, 関数 $f(x) = 2^x(x^2+1)$ の n 次導関数を求めよ。(10 点)

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = (1+x)\cos x$ の, $x = 0$ の近傍でのテーラー展開を x^4 の項まで求めよ。剰余項は R_5 と略記せよ。(10 点)

$\boxed{6}$ $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ のとき, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ。[参考] 関数 Cos^{-1} の定義域は $[-1,1]$, 値域は $[0,\pi]$ である。(10 点)

$\boxed{7}$ 関数 $f(x,y) = x^3y + xy^2$ にラプラシアン (微分作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ のこと) を作用させよ。(10 点)

$\boxed{8}$ 下記の小問 (1)〜(3) に答えよ。

(1) xy 平面上の曲線 C を, θ をパラメータとして下式で定義する。

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \quad y = \sqrt{2}\sin\theta$$

このとき, $\theta = \frac{\pi}{4}$ に対応する C 上の点 P $(\frac{1}{2}, 1)$ での曲線 C の接線の方程式を求めよ。(6 点)

(2) xyz 空間内の曲面 S を, 2 変数関数 $f(x,y) = x^y$ を用いて方程式 $z = f(x,y)$ で定義する。このとき, S 上の点 Q $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ での曲面 S の接平面の方程式を求めよ。(6 点)

(3) $z = x^y$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\sin\theta$ について,（偏微分を使用する多変数関数の）合成関数の微分法を用いて, $\frac{dz}{d\theta}$ を計算し, 結果を x, y を使わずに θ のみを使って表せ。また, $\frac{dz}{d\theta}$ の $\theta = \frac{\pi}{4}$ での値を求めよ。本小問は, 小問 (1),(2) と関連付けて解答することが望ましい。(8 点)

[1]

(1) $f' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' = \dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \quad (f = u^{1/2},\ u = \cos x)$

$= \dfrac{1}{2}u^{-1/2}(-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ (答) $= -\dfrac{\tan x\sqrt{\cos x}}{2}$ (答)

(2) $f' = \left(\arctan\dfrac{1}{x+1}\right)' = \dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \quad (f = \arctan u,\ u = (1+x)^{-1})$

$= \dfrac{1}{u^2+1}\cdot\left\{-(1+x)^{-2}\right\} = \dfrac{-1}{\left\{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+1\right\}(1+x)^2} = -\dfrac{1}{1+(1+x)^2}$ (答)

$= -\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ (答)

(3) $f' = f\cdot(\log f)' = (2x)^{3x}(3x\log 2x)' = (2x)^{3x}\left\{3\log 2x + 3x\cdot\dfrac{2}{2x}\right\}$

$= 3(\log 2x + 1)(2x)^{3x}$ (答)

$= 3(\log x + \log 2 + 1)(2x)^{3x}$ (答)

[2]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x^3}^{\to 0}}{\underbrace{1+x+\frac{1}{2}x^2-e^x}_{\to 0}} \overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{3x^2}^{\to 0}}{\underbrace{1+x-e^x}_{\to 0}} \overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{6x}^{\to 0}}{\underbrace{1-e^x}_{\to 0}}$

$\displaystyle\overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6}{-e^x} = -6$ (答)

[別解] e^xのTaylor展開を利用して

$\dfrac{x^3}{1+x+\frac{1}{2}x^2-e^x} = \dfrac{x^3}{1+x+\frac{1}{2}x^2-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^4)\right)} = \dfrac{x^3}{-\frac{1}{6}x^3+O(x^4)}$

$= \dfrac{1}{-\frac{1}{6}+O(x^1)} \xrightarrow{(x\to 0)} \dfrac{1}{-\frac{1}{6}+0} = -6$ (答)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cos 0$

$= \dfrac{1}{2}$ (答)　　さいしょに $u = \dfrac{1}{x}$ とおきかえ、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ を $\displaystyle\lim_{u\to 0}$ におきかえる方が良い.

2

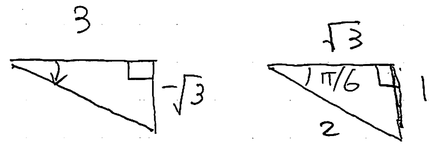
(2) [別解] $\cos u = 1-\frac{1}{2}u^2+\overset{大}{O}(u^4)$ に $u=\frac{1}{x}$ を代入して.

$$x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=x^2\left\{1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\overset{大}{O}(x^{-4})\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\overset{大}{O}(x^{-2})\xrightarrow{(x\to\infty)}\frac{1}{2}\ \text{(答)}$$

3

(1) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$



[注意] arctan の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ なので ($\frac{5}{6}\pi$ は誤り).

(2) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\arccos\frac{1}{3}$ とおくと. $\cos\theta=\frac{1}{3}$ かつ $0\leq\theta\leq\pi$ $\therefore \sin\theta\geq 0$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(\text{与式})=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}\ \text{(答)}$$

4 ライプニッツの公式により

$$f^{(n)}=\binom{n}{0}2^x(\log 2)^n(x^2+1)+\binom{n}{1}2^x(\log 2)^{n-1}\cdot 2x+\binom{n}{2}2^x(\log 2)^{n-2}2$$

$$=2^x(\log 2)^{n-2}\left\{(\log 2)^2(x^2+1)+2n(\log 2)x+n(n-1)\right\}\ \text{(答)}$$

$$=2^x(\log 2)^{n-2}\left\{(\log 2)^2x^2+2n(\log 2)x+n(n-1)+(\log 2)^2\right\}\ \text{(答)}$$

5

$$f(x)=(1+x)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\overset{大}{O}(x^6)\right)$$

$$=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^4+\underbrace{\overset{大}{O}(x^5)}_{\shortparallel\ R_5}\ \text{(答)}$$

8

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$, $m = \dfrac{dx}{d\theta}(\theta = \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{dy}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$, $n = \dfrac{dy}{d\theta}(\theta = \frac{\pi}{4}) = 1$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \left(= -\dfrac{2}{\tan\theta}\right)$, $l = \dfrac{dy}{dx}(\theta = \frac{\pi}{4}) = \dfrac{n}{m} = -2$

接線の方程式は $y - 1 = l \cdot (x - \frac{1}{2})$ $\therefore$ $y = -2x + 2$ (答)

(2) $f_x = y x^{y-1}$, $p = f_x(\frac{1}{2}, 1) = 1 \cdot (\frac{1}{2})^0 = 1$

$f_y = x^y \log x$, $q = f_y(\frac{1}{2}, 1) = (\frac{1}{2})^1 \log\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\log 2$

接平面の方程式は $z - \frac{1}{2} = p \cdot (x - \frac{1}{2}) + q \cdot (y - 1)$

$\therefore$ $z = x - \dfrac{\log 2}{2} y + \dfrac{\log 2}{2}$ (答)

8

(3) $\dfrac{dz}{d\theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{d\theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{d\theta}$

$= yx^{y-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) + x^y \log x \sqrt{2}\cos\theta$

$= \sqrt{2}\, x^y \left(\log x \cos\theta - \frac{1}{2}\frac{y}{x}\sin\theta\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^{\sqrt{2}\sin\theta}\left\{\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\cos\theta - \tan\theta\sin\theta\right\}$

$= \sqrt{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}\sin\theta}\left(\cos\theta \log\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$ (答)

$\dfrac{dz}{d\theta}\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ (答)

- $\dfrac{dz}{d\theta}\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ は (1), (2) で求めた m, n, p, q を利用して

$\dfrac{dz}{d\theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{d\theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{d\theta}$ に $\theta = \frac{\pi}{4}$ を代入すると.

$\dfrac{dz}{d\theta}\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right) = p\cdot m + q\cdot n$

$= 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\log 2\right)\cdot 1$

$= -\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ (答) として求めることもできる.

- $\dfrac{dz}{d\theta}$ は $z = \left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}\sin\theta}$ に対して対数微分法を適用して

$\dfrac{dz}{d\theta} = z\,(\log z)' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^{\sqrt{2}\sin\theta}\left(\sqrt{2}\sin\theta \log\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)'$

$= \sqrt{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}\sin\theta}\left(\cos\theta\log\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$ (答)

としても求まるが、この答え方では問題文の指示に従っていない。