微分積分 I (a)　中間試験　問題・答案用紙　(全3頁中の第1頁目)

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 1年生対象, 担当教員 田嶋,　2015 年 7 月 3 日 2 限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

$\boxed{1}$ 小問 1)〜5) に示した関数 $f(x)$ の 1 次 (階) 導関数 f' を求めよ。(5 点× 5 問=25 点)

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$ $(x > -1)$　2) $f(x) = \log\left\{(x^2+1)^5(x^3-2)^3\right\}$ $(x > 2^{1/3})$　3) $f(x) = x^{(e^x)}$ $(x > 0)$

4) $f(x) = \tan\left\{\cos\left(\sin\ x\right)\right\}$ $(-\infty < x < \infty)$　5) $f(x) = \arctan\left(\arcsin\sqrt{x}\right)$ $(x > 0)$,

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 27 年 7 月 3 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点 /25

微分積分 I (a)　中間試験　問題・答案用紙　（全 3 頁中の第 2 頁目）

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　2015 年 7 月 3 日 2 限実施

$\boxed{2}$ 小問 1)〜3) については、与えられた式の値を求め、小問 4) については、与えられた方程式の解 x を求めよ。(5 点 × 4 問 =20 点)

1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$　2) $\sin\left\{\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$　3) $\sin\left\{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$

4) $\arcsin x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$　(解が複数あれば全て求めよ。解がなければ必ず理由をつけて「解なし」と答えよ。)

$\boxed{3}$ 小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ。ただし a, b, c, d は正の実数値を持つ定数とする。(10 点 × 2 問=20 点)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$　2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{1+bx}\right)^{\frac{c}{\log(1+dx)}}$

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 27 年 7 月 3 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号								氏名	得点 /40

$\boxed{4}$ 下記の小問 1) ～ 3) の関数 $f(x)$ の、$x = 0$ の近傍でのテーラー展開を x^4 の項まで求めよ。剰余項は R_5, $\mathcal{O}(x^5)$, $o(x^4)$ 等と略記せよ。(5 点 × 3 問=15 点)

1) $f(x) = (1 + x)^{1/2}$　　2) $f(x) = \sin x + \cos x + e^x$　　3) $f(x) = \log\bigl(\cos x\bigr)$

$\boxed{5}$ $f(x) = (x^2 + x) \cos x$ とするとき、下記の小問 1), 2) に答えよ。(10 点 × 2 問=20 点)

1) n を 3 以上の整数とするとき、$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

2) $f(x)$ の $x = 0$ の近傍でのテーラー展開を x^4 の項まで求めよ。剰余項は R_5, $\mathcal{O}(x^5)$, $o(x^4)$ 等と略記せよ。

なお、前小問の結果を利用して求める場合は、前小問の結果が $n \geq 0$ で成立することを、理由を説明することなく使ってよい。

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 27 年 7 月 3 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号								氏名	(第 3 頁目) 得点 /35

1. (1) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$

$y' = y(\log y)' = y \cdot \left\{ \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{1}{2}\log(x+3) - \frac{1}{2}\log(x+4) \right\}'$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}} \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4} \right)$ (答)

$= \dfrac{2x^2+10x+11}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)^3(x+4)^3}}$ (答)

(2) $y = \log\{(x^2+1)^5(x^3-2)^3\}$

$y' = \{5\log(x^2+1) + 3\log(x^3-2)\}'$

$= 5 \cdot \dfrac{2x}{x^2+1} + 3 \cdot \dfrac{3x^2}{x^3-2} = \dfrac{10x}{x^2+1} + \dfrac{9x^2}{x^3-2}$ (答)

$= \dfrac{x(19x^3+9x-20)}{(x^2+1)(x^3-2)}$ (答)

(3) $y = x^{(e^x)}$

$y' = y(\log y)' = x^{e^x}(e^x \log x)' = x^{e^x}\left(e^x \log x + e^x \dfrac{1}{x}\right)$

$= x^{e^x} e^x \left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$ (答)

$= x^{e^x - 1} e^x (x \log x + 1)$ (答)

(4) $y = \tan\{\cos(\sin x)\} = \tan u, \quad u = \cos v, \quad v = \sin x$

$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{d\tan u}{du} \cdot \dfrac{d\cos v}{dv} \cdot \dfrac{d\sin x}{dx}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot (-\sin v) \cdot \cos x$

$= -\dfrac{\cos x \sin(\sin x)}{\cos^2\{\cos(\sin x)\}}$ (答)

1.(5) $y = \arctan(\mathrm{arsin}\sqrt{x})$

$= \arctan u, \quad u = \arcsin v, \quad v = \sqrt{x}$

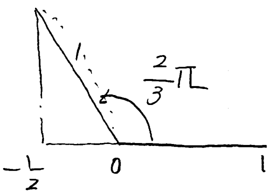
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{d\arctan u}{du}\cdot\frac{d\,\mathrm{arsin}\,v}{dv}\cdot\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$= \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}\left\{(\mathrm{arsin}\sqrt{x})^2+1\right\}} \quad (答)$$

2.(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$ (答)



(注) $0 \leqq \arccos x \leqq \pi$ であるから、$\frac{4}{3}\pi$ や $-\frac{2}{3}\pi$ は誤答。

(2) $\sin\left\{\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$

$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ とおくと $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

(与式) $= \sin\theta = +\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (答)

$\because$ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから.

(3) $\sin\left\{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$

(与式) $= \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta$

$= -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ (答)

(4) $\arccos x$ の値域は $[0, \pi]$ なので

$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \geqq 0$

$\therefore$ (右辺) $= \frac{2}{3}\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \geqq \frac{2}{3}\pi > \frac{\pi}{2}$

$\arcsin x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ なので $\arcsin x =$ (右辺) $> \frac{\pi}{2}$

をみたす x は存在しない。 $\therefore$ 解なし (答)

3、1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)-x-1}{1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+O(x)}{-1+O(x^2)}=\frac{1+0}{-1+0}=-1 \text{ (答)}$$

(別解)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(e^x-x-1)}^{\to 0}}{\underbrace{(\cos x-1)}_{\to 0}}\overset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(e^x-1)}^{\to 0}}{\underbrace{(-\sin x)}_{\to 0}}\overset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{-\cos x}=-1 \text{ (答)}$$

2) $$y=\left(\frac{a}{1+bx}\right)^{\frac{c}{\log(1+dx)}}$$ a, b, c, d は正の定数.

$$\lim_{x\to\infty}y=\exp\lim_{x\to\infty}\log y$$

$$=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{c}{\log(1+dx)}\log\frac{a}{1+bx}$$

$$=\exp c\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(\log a-\log(1+bx))}^{\to -\infty}}{\underbrace{(\log(1+dx))}_{\to \infty}}$$

$$\overset{\text{ロピタル}}{=}\exp c\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{b}{1+bx}}{\frac{d}{1+dx}}$$

$$=\exp c\cdot\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+\frac{1}{d}}{x+\frac{1}{b}}\right)=\exp c\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1+\overbrace{\frac{1}{dx}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{bx}}_{\to 0}}\right)$$

$$=\exp(-c)$$

$$=e^{-c} \text{ (答)}$$

4.(1) $f(x) = (1+x)^{1/2}$

$$= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \binom{1/2}{4}x^4 + R_5$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + R_5 \quad (答)$$

2項係数の計算：

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8},\quad \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16},\quad \binom{1/2}{4} = \frac{1}{16}\cdot\frac{-\frac{5}{2}}{4} = -\frac{5}{128}$$

(2) $f(x) = \sin x + \cos x + e^x$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$+ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$+ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)$$

$$= 2 + 2x + \frac{1}{12}x^4 + R_5 \quad (答)$$

(3) $f(x) = \log(\cos x) = \log(1 + \cos x - 1)$

$f(x) = \log(1+u)$, $u = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$

$f(x) = u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3)$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)^2 + O(x^6)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + O(x^6)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^6) \quad (答)$$

5. (1) $f(x)=(x^2+x)\cos x$ のとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ (教科書 p.43の例題2.3.2) と同一の問題です.

ライプニッツの公式を利用すると

$$f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}(x^2+x)\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+\binom{n}{1}(2x+1)\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+\binom{n}{2}2\cos\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$=(x^2+x)\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+n(2x+1)\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+n(n-1)\cos\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)$$ (答)

(補足) 上の導出では 3項を書いたので $n\geqq 2$ を仮定しているが, 結果の式は $n\geqq 0$ で成り立つ.

$\because$ $n=0,1$ で $\binom{n}{2}=0$, $n=0$ で $\binom{n}{1}=0$.

(2) 前小問で得た $f^{(n)}(x)$ の表式を使うと.

$f^{(0)}(0)=0$, $f^{(1)}(0)=1$, $f^{(2)}(0)=2$,

$f^{(3)}(0)=3\cdot(-1)=-3$, $f^{(4)}(0)=12\cdot(-1)=-12$ なので

$$f(x)=0+1\cdot x+\frac{2}{2}x^2+\frac{-3}{6}x^3+\frac{-12}{24}x^4+\overset{\text{大}}{O}(x^5)$$

$$=x+x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4+\overset{\text{大}}{O}(x^5)$$ (答)

別解 $$f(x)=(x^2+x)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\overset{\text{大}}{O}(x^4)\right)$$

$$=x+x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4+\overset{\text{大}}{O}(x^5)$$ (答)

KOKUYO