$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の関数の 1 階導関数を計算せよ.

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

2. $f(x) = \log(\log(x^2 + x))$.

3. $f(x) = (x^2 + 1)^x$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ を計算せよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ パラメータ θ を介して表された xy 平面上の曲線 $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$ (アステロイドと呼ばれる) の $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ に対応する点での接線の方程式を求めよ.

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 I(期末)	H26 8/1	古閑・田嶋 橋本・保倉			/35

4 逆三角関数に関する以下の問いに答えよ.

1. $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ の $x = \dfrac{1}{2}$ における接線の方程式を求めよ.

2. $\mathrm{Tan}^{-1}x = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{4}$ を満たす x の値を求めよ.

5 次のテーラー展開を求めよ. ただし剰余項は R_n 等と略記してよい.

1. $f(x) = \log(x+1)$ の $x = 0$ で 3 次までの展開.

2. $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(x + \sqrt{3})$ の $x = 0$ で 2 次までの展開.

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　　名	得　点
微分積分 I(期末)	H26 8/1	古閑・田嶋 橋本・保倉			/28

6 ライプニッツの公式を用いて $f(x)=x^2e^x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geq 2)$ を計算せよ.

7 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ について, 以下の問いに答えよ.

1. z_x と z_y を求めよ.
2. $(1,1,\sqrt{2})$ での接平面の方程式を求めよ.

8 $z=f(x,y)$, $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$ の時, 以下の問いに答えよ.

1. z_u と z_v を x, y, z_x, z_y を用いて表せ.
2. $z_{uu}+z_{vv}$ を x, y, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} を用いて表せ.

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 I(期末)	H26 8/1	古閑・田嶋 橋本・保倉			/37

$\boxed{1}$

1、 $f' = \left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)' = \dfrac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x e^x}{(x+1)^2}$ （答）

関数の商の微分公式　　$(e^x)' = e^x$, $x' = 1$

2、 $f' = \left[\log\{\log(x^2+x)\}\right]' = \dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ （$f = \log u$, $u = \log v$, $v = x^2+x$ とおいた.）

合成関数の微分公式

$$= \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}\cdot(2x+1)$$

$$= \frac{2x+1}{(x^2+x)\log(x^2+x)}$$ （答）

3、 $f' = \{(x^2+1)^x\}' = f\cdot(\log f)' = (x^2+1)^x\{x\log(x^2+1)\}'$

対数微分法

$$= (x^2+1)^x\left[x'\log(x^2+1) + x\{\log(x^2+1)\}'\right]$$

関数の積の微分公式

ここで, $x' = 1$

合成関数の微分公式

$$\{\log(x^2+1)\}' = \frac{d\log t}{dt}\,\frac{dt}{dx}$$ （$t = x^2+1$ とおいた）

$$= \frac{1}{t}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

なので,

$$f' = (x^2+1)^x\left\{\log(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right\}$$ （答）

[2]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{6}x^{3}+\overset{大}{O}(x^{4})\right\}-\left\{1-x+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{6}x^{3}+\overset{大}{O}(x^{4})\right\}-2x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^{3}+\overset{大}{O}(x^{4})}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3}+\underbrace{\overset{大}{O}(x^{1})}_{\to 0}\right\}=\frac{1}{3}\ \text{(答)}$$

[別解] ロピタルの定理を利用すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(e^{x}-e^{-x}-2x)}^{\to 1-1-0=0}}{\underbrace{(x^{3})}_{\to 0}}\overset{\text{ロピタルの定理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-e^{-x}-2x)'}{(x^{3})'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(e^{x}+e^{-x}-2)}^{\to 1+1-2=0}}{\underbrace{(3x^{2})}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}+e^{-x}-2)'}{(3x^{2})'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(e^{x}-e^{-x})}^{\to 1-1=0}}{\underbrace{(6x)}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-e^{-x})'}{(6x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{1}{3}\ \text{(答)}$$

パラメータ表示関数の微分法

合成関数の微分法

$\boxed{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ での x, y, $\frac{dy}{dx}$ の値を x_0, y_0, m_0 とかくと.

$$x_0 = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$y_0 = \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$m_0 = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(x_0, y_0) での接線の方程式は

$$y - y_0 = m_0(x - x_0)$$

であるから.

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}\cdot\left(x - \frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore\ y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (答)$$

[別解1] パラメータ θ を消去してから求めると、

$x = \cos^3\theta$. $\theta = \frac{\pi}{3}$ では $\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$ なので $\cos\theta = x^{1/3}$.

$\therefore\ \theta = \arccos(x^{1/3})$

$y = \sin^3\theta = \sin^3\{\arccos(x^{1/3})\}$ ……①

方程式①で表された(x, y)平面上の曲線の $x(\theta = \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{8}$ での接線を求めればよい。

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2\{\arccos(x^{1/3})\}\cos\{\arccos(x^{1/3})\}\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2/3}}}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x = \frac{1}{8}\right) = 3\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\frac{1}{3}\frac{4}{3} = -\sqrt{3}$$

$\therefore$ 答は $y - y\left(x = \frac{1}{8}\right) = \frac{dy}{dx}\left(x = \frac{1}{8}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{8}\right)$. 即ち

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}\cdot\left(x - \frac{1}{8}\right) \quad \therefore\ y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (答)$$

[別解2] $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = x^{2/3} + y^{2/3}$ $\quad\therefore\ y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ ……②

②式を①式のかわりに使って求める方が計算量が少い。もちろん、パラメータ表示のまま求めるのが最も良い。

4

1、 $y = \arcsin x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x_0 \equiv \frac{1}{2}, \quad y_0 \equiv y(x=x_0) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$m_0 \equiv y'(x=x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

接線の方程式は、

$$y - y_0 = m_0 \cdot (x - x_0)$$

であるから

$$y - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \therefore y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{答})$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\pi - 2\sqrt{3}}{6} \quad (\text{答})$$

2、 $\arctan x = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tan\left(\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4}\right) \text{ かつ } \left|\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4}\right| < \frac{\pi}{2}$$

$\arctan x$ が単調増加関数であり

$0 < \frac{1}{3} < 1$ より、 $\arctan 0 < \arctan\frac{1}{3} < \arctan 1$

$\therefore \ 0 < \arctan\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ より 同様の理由で $0 < \arctan\frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \ 0 < \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$

故に $x = \tan\left(\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4}\right)$ は解である。

tanの加法定理を利用して、

$$x = \frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right) + \tan\left(\arctan\frac{1}{4}\right)}{1 - \tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right) \cdot \tan\left(\arctan\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{7}{11} \quad (\text{答})$$

$\boxed{5}$

1. $f(x) = \log(x+1) \quad \therefore f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad \therefore f'(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \quad \therefore f''(0) = -\dfrac{1}{(0+1)^2} = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \quad \therefore f'''(0) = \dfrac{2}{(0+1)^3} = 2$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + R_4$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + R_4 \quad (答)$$

2. $f(x) = \arctan(x+\sqrt{3}) \quad \therefore f(0) = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(x+\sqrt{3})^2} \quad \therefore f'(0) = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}^2} = \dfrac{1}{4}$

$f''(x) = -\dfrac{2(x+\sqrt{3})}{\{1+(x+\sqrt{3})^2\}^2} \quad \therefore f''(0) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{4^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_3$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8}}{2}x^2 + R_3$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{16}x^2 + R_3 \quad (答)$$

$\boxed{6}$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$$ （これがライプニッツの公式である）

ここで $\binom{n}{k} = {}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ n & (k=1) \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & (k=2) \end{cases}$

二項係数　組み合わせの数

$$(x^2)^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} x^2 = \begin{cases} x^2 & (k=0) \\ 2x & (k=1) \\ 2 & (k=2) \\ 0 & (k \geqq 3) \end{cases}$$

$$(e^x)^{(n-k)} = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^x = e^x \quad (0 \leqq k \leqq n)$$

$$\therefore f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(x^2)^{(0)}(e^x)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)^{(1)}(e^x)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)^{(2)}(e^x)^{(n-2)}$$

$$= 1 \cdot x^2 \cdot e^x + n \cdot 2x \cdot e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot e^x$$

$$= \{x^2 + 2nx + n(n-1)\} e^x$$ （答）

$\boxed{7}$

1. $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{d\sqrt{t}}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} \quad (t = x^2+y^2 \text{とおいた})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot(2x+0) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{答})$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{d\sqrt{t}}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot(0+2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{答})$$

2、 $x_0 \equiv 1,\quad y_0 \equiv 1$ とする。

$$z_0 \equiv z(x=x_0, y=y_0) = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$m_0 = z_x(x=x_0, y=y_0) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_0 = z_y(x=x_0, y=y_0) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

点 (x_0, y_0, z_0) を接点とする接平面の方程式は

$$z - z_0 = m_0\cdot(x-x_0) + n_0\cdot(y-y_0)$$

であるから、

$$z - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(y-1)$$

$$\therefore\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad (\text{答})$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \quad (\text{答})$$

$\boxed{8}$ 1.

$$\begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{u+v} & e^{u-v} \\ e^{u+v} & -e^{u-v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

答.

$$z_u = x z_x + y z_y \quad \cdots\cdots ①$$

$$z_v = x z_x - y z_y \quad \cdots\cdots ②$$

2.

$$z_{uu} = x\, z_{ux} + y\, z_{uy} \quad (\because ① 式で\ z \to z_u\ とおきかえた)$$

$$z_{ux} = \frac{\partial}{\partial x}(x z_x + y z_y) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} \cdot z_x + x\, z_{xx} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} \cdot z_y + y\, z_{yy}$$

$$= z_x + x\, z_{xx} + y\, \underbrace{z_{yx}}_{= z_{xy}}$$

$$z_{uy} = \frac{\partial}{\partial y}(x z_x + y z_y) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} z_x + x\, z_{xy} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} z_y + y\, z_{yy}$$

$$= x\, z_{xy} + z_y + y\, z_{yy}$$

$$\therefore\ z_{uu} = x^2 z_{xx} + 2xy\, z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y$$

$$z_{vv} = x\, z_{vx} - y\, z_{vy} \quad (\because ② 式で\ z \to z_v\ とおきかえた)$$

$$z_{vx} = \frac{\partial}{\partial x}(x z_x - y z_y) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} z_x + x\, z_{xx} - \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} z_y - y\, z_{yx}$$

$$= z_x + x\, z_{xx} - y\, \underbrace{z_{yx}}_{= z_{xy}}$$

$$z_{vy} = \frac{\partial}{\partial y}(x z_x - y z_y) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} z_x + x\, z_{xy} - \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} z_y - y\, z_{yy}$$

$$= x\, z_{xy} - z_y - y\, z_{yy}$$

$$\therefore\ z_{vv} = x^2 z_{xx} - 2xy\, z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y$$

$$\therefore\ z_{uu} + z_{vv} = 2x^2 z_{xx} + 2y^2 z_{yy} + 2x z_x + 2y z_y \quad (答)$$

[注意事項] $z_{ux} \neq z_{xu}$ であることに留意せよ。(変数変換を考え始めると偏微分はずっと複雑になります)

$$\begin{cases} z_{ux} = \dfrac{\partial}{\partial x} z_u = \dfrac{\partial}{\partial x}(x z_x + y z_y) = z_x + x\, z_{xx} + y\, z_{yx} \\ z_{xu} = x (z_x)_x + y (z_x)_y = x\, z_{xx} + y\, z_{xy} \end{cases}$$

z_{ux} と z_{xu} の差

$z_{xy} = z_{yx}$, $z_{uv} = z_{vu}$ は

「独立変数の組みあわせ方が同一のときに偏微分の順序を入れかえてよい」

ということであり、z_{ux}, z_{xu} は $\underset{x}{u}$ で偏微分するときは $\underset{(x,y)}{(u,v)}$ で z を表すので状況が異なる。