微分積分 I (b)　中間試験　問題・答案用紙　(全3頁中の第1頁目)

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 1年生対象, 担当教員 田嶋,　2014 年 6 月 20 日 2 限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

$\boxed{1}$ 小問 1)〜5) に示した関数 $f(x)$ の 1 次 (階) 導関数 f' を求めよ。(5 点× 5 問=25 点)

1) $f(x) = \sqrt{\cos\,x}$　$(|x| < \frac{\pi}{2})$　　2) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$　$(x > 0)$　　3) $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$　$(|x| > 1)$

4) $f(x) = \arctan\left(\log\,x\right)$　$(x > 0)$　　5) $f(x) = \frac{x^4(x+1)^5}{(x+2)^6(x+3)^7}$　$(x > 0)$, 但し 5) の結果は $c_0 \sim c_3$ を定数として、$f' = \left(\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} + \frac{c_3}{x+3}\right) \cdot \frac{x^4(x+1)^5}{(x+2)^6(x+3)^7}$ の形か、あるいは、$f' = (x\text{ の 3 次式}) \cdot \frac{x^3(x+1)^4}{(x+2)^7(x+3)^8}$ の形に表せ。「x の 3 次式」は係数が整数となる範囲で因数分解してもよい。どちらの形にも当てはまらない答には得点を与えない。

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 26 年 6 月 20 日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号	氏 名	(第 1 頁目) 得 点　/25

微分積分 I (b)　中間試験　問題・答案用紙　(全3頁中の第2頁目)

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 1年生対象, 担当教員 田嶋,　2014 年 6 月 20 日 2 限実施

$\boxed{2}$ 小問 1)〜4) に示した式の値を求めよ。(5 点 × 4 問 =20 点)

1) $\arcsin\frac{1}{2}$　　2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$　　3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{1}{3}\right)$　　4) $\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{5}{\sqrt{3}}$

考え方： 4) では、まず、tan(与式) の値を計算するとよい。

$\boxed{3}$ 小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ。(10 点 × 2 問=20 点)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-3x-e^{-3x}}$,　　2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(1+3x)/x}$

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 26 年 6 月 20 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点 /40

福井大学工学部 建築・材料・生物・物理 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　2014 年 6 月 20 日 2 限実施

$\boxed{4}$ n を 0 以上の整数とするとき、下記の小問 1),2) に答えよ。(5 点+10 点=15 点)

1) $f(x) = 2^x$ のとき、$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

2) $g(x) = 2^x x^3$ のとき、$g(x)$ の n 次導関数 $g^{(n)}(x)$ を求めよ。なお、計算は $n \geq 3$ を仮定して進めてよい。実は、得られた結果は $n = 0, 1, 2$ でも成り立つが、そのことには言及しなくてよい。

$\boxed{5}$ f は 2 回微分可能な関数であり、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ と書き表すものとする。このとき、小問 1), 2) に答えよ。(10 点 × 2 問=20 点)

1) $z = f(\sin t)$ とする。このとき、$\frac{dz}{dt} = f'(\sin t) \cos t$ が成り立つ。これと同様に、$\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を、f', f'', sin, cos, t を用いて表せ。

2) $z = \cos\bigl(f(t)\bigr)$ とする。このとき、$\frac{dz}{dt} = -\sin\bigl(f(t)\bigr) f'(t)$ が成り立つ。これと同様に、$\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を、f, f', f'', sin, cos, t を用いて表せ。

なお、答に自信の持てないときは、次のことを確認してみよ。1) の答で $f = \cos$ とした場合、および、2) の答で $f = \sin$ とした場合は、$\cos(\sin t)$ を t で 2 回微分した結果に一致するはずである。

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 26 年 6 月 20 日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号								氏 名	(第 3 頁目) 得 点 /35

2014年度前期　ASBP　微分積分I(b)　中間試験　解答・解説

(全体を通じて) 軽微なまちがいは減点しないことがあります。

$\boxed{1}$

合成関数の微分法

1) $f' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' = \dfrac{df}{dt}\dfrac{dt}{dx} \quad (f = t^{1/2},\ t = \cos x)$

$= \frac{1}{2}t^{-1/2}\cdot(-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ (答)

対数微分法

2) $f' = \left(x^{\sqrt{x}}\right)' = x^{\sqrt{x}}\left\{\log\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right\}' = x^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\ \log x\right)'$

関数の積の微分法

$= x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right)$ (答) $= x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right)$ (答)

合成関数の微分法

3) $f' = \left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{df}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} \quad \left(f = \arcsin t,\ t = \dfrac{1}{x}\right)$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ (答) $= -\dfrac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$ (答) $= -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (答)

合成関数の微分法

4) $f' = \left\{\arctan(\log x)\right\}' = \dfrac{df}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} \quad (f = \arctan t,\ t = \log x)$

$= \dfrac{1}{1+t^2}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\left\{1 + (\log x)^2\right\}}$ (答)

注意：$(\log x)^2$ を $\log^2 x$ と書き表すのは一般的ではないのでやめましょう。

対数微分法

5) $f' = \left\{\dfrac{x^4(x+1)^5}{(x+2)^6(x+3)^7}\right\}' = f\cdot(\log f)'$

$(\alpha>0,\ \beta>0)$ $\log(\alpha\beta) = \log\alpha + \log\beta$, $(\alpha>0,\ -\infty<\beta<\infty)$ $\log\alpha^\beta = \beta\log\alpha$

$= \left\{\log\dfrac{x^4(x+1)^5}{(x+2)^6(x+3)^7}\right\}'\cdot f = \left\{4\log x + 5\log(x+1) - 6\log(x+2) - 7\log(x+3)\right\}'\cdot f$

$= \left(\dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{6}{x+2} - \dfrac{7}{x+3}\right)\cdot\dfrac{x^4(x+1)^5}{(x+2)^6(x+3)^7}$ (答)

$\left\{\log(x+\alpha)\right\}' = \dfrac{d\log t}{dt}\dfrac{dt}{dx} \quad (t = x+\alpha)$

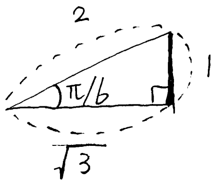
$= \dfrac{1}{t}\cdot 1 = \dfrac{1}{x+\alpha}$

項をまとめると

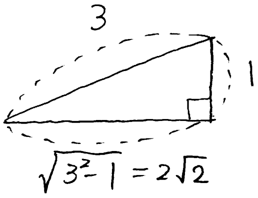
$f' = (-4x^3+4x^2+42x+24)\cdot\dfrac{x^3(x+1)^4}{(x+2)^7(x+3)^8}$

$= -2(x-4)(2x^2+6x+3)\cdot\dfrac{x^3(x+1)^4}{(x+2)^7(x+3)^8}$

$\boxed{2}$

1) 

左図より　$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$　(答)

2) 

左図より　$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$　(答)

正弦関数の加法定理

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin\frac{1}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$　(答)

4) $\alpha = \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$ とおくと．　※1 $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$，　※2 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\beta = \arctan\frac{5}{\sqrt{3}}$ とおくと．　$\tan\beta = \frac{5}{\sqrt{3}}$，　$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow 0 < \alpha + \beta < \pi$

$\tan(\text{与式}) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$

正接関数の加法定理

$0 < \alpha + \beta < \pi$ かつ $\tan(\alpha + \beta) = -\sqrt{3}$ より．　$\alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi$　(答)

※1　「$y = \arctan x$」 $\underset{(\text{同値})}{\Longleftrightarrow}$ 「$x = \tan y$ かつ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$」

※2　$y = \arctan x$ は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ で単調増加関数なので

$0 < \tan\alpha < \infty$　より

$\arctan 0 < \arctan(\tan\alpha) < \arctan\infty$，

即ち　$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

が成立することが示せる．

$\boxed{3}$

1)
$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(x^2)}^{\to 0}}{\underbrace{1-3x-e^{-3x}}_{\to 0}} \overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-3x-e^{-3x})'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(2x)}^{\to 0}}{\underbrace{-3+3e^{-3x}}_{\to 0}} \overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(-3+3e^{-3x})'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{-9\underbrace{e^{-3x}}_{\to 1}} = -\frac{2}{9}\ (\text{答})$$

2) 一般に、$y>0$ なら、exp と log が互いに逆関数の関係にあることから

$y=\exp(\log y)$ が成立する. したがって $\lim_{x\to 0} y = \exp\left(\lim_{x\to 0}\log y\right)$ が成立する.

$x=0$ 付近で $\frac{1}{1-2x}\approx 1>0$ なので

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(1+3x)/x} = \exp\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(1+3x)/x}$$

$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{1+3x}{x}\log\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= \exp\left\{-\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\log(1-2x)}^{\to \log 1=0}}{\underbrace{\frac{x}{1+3x}}_{\to 0}}\right\} \qquad \left(\because \log\frac{1}{A} = -\log A \quad A>0\right)$$

$$\overset{\text{ロピタルの定理}}{=} \exp\left[-\lim_{x\to 0}\frac{\{\log(1-2x)\}'}{\left(\frac{x}{1+3x}\right)'}\right]$$

$$= \exp\left[-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-2x}\cdot(-2)}{\frac{1+3x-3x}{(1+3x)^2}}\right]$$

$$= \exp\left[2\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^2}{1-2x}\right]$$

$$= \exp 2 = e^2\ (\text{答})$$

[別解]

$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ を利用する.

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{x}+3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\{1+(-2x)\}^{\frac{2}{-2x}}(1-2x)^3$$

$$= \lim_{y\to 0}\left\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}^2(1+y)^3 \quad \left(y=-2x \text{ とおいた}\right)$$

$$= \{e\}^2(1)^3$$

$$= e^2\ (\text{答})$$

$\boxed{4}$

1) $f = 2^x, \quad f' = 2^x \log 2, \quad f'' = (2^x)' \log 2 = 2^x \log 2 \cdot \log 2 = 2^x (\log 2)^2$

以上で $f^{(n)} = 2^x (\log 2)^n$ と推測される。（推測が正しければ正解）

この推測を数学的帰納法で証明するには：（証明がなくても（まちがっていても）減点しない）

$n=0$ のとき 推測は成立している（$\because f^{(0)} = 2^x (\log 2)^0$）

$n \geq 0$ で推測が成立すると仮定すると（即ち $f^{(n)} = 2^x (\log 2)^n$）

$$f^{(n+1)} = \frac{d}{dx} f^{(n)} = \frac{d}{dx} 2^x (\log 2)^n = \frac{d 2^x}{dx} (\log 2)^n = 2^x \log 2 \, (\log 2)^{n-1}$$

$\therefore f^{(n+1)} = 2^x (\log 2)^{n+1}$ $\quad\therefore$ 推測は $n+1$ でも成立する

$\therefore$ 数学的帰納法（自然数の公理のひとつ）により 任意の $n \geq 0$ で推測は成立する

2) ライプニッツの公式を利用すると、

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^x)^{(n-k)} (x^3)^{(k)} \quad \text{------①}$$

$$= \binom{n}{0} (2^x)^{(n)} (x^3)^{(0)} + \binom{n}{1} (2^x)^{(n-1)} (x^3)^{(1)} + \binom{n}{2} (2^x)^{(n-2)} (x^3)^{(2)} + \binom{n}{3} (2^x)^{(n-3)} (x^3)^{(3)}$$

$\because$ $k \geq 4$ で $(x^3)^{(k)} = 0$ となる。また $n < 3$ のときは上式には①式の右辺に含まれない $(2^x)^{(n-k)}$ （$n-k<0$）の項が含まれているが、1)の結果はこのような「負の回数の微分に対しても意味をもち、また $\binom{n}{k}$ を

$\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}$ と表せば $n < k$ ではゼロとなるので 上式は（分子に因子0が現れ、分母はゼロではない）

$n = 0, 1, 2$ でも成り立つことになる。

$$g^{(n)}(x) = 1 \cdot 2^x (\log 2)^n x^3 + n \cdot 2^x (\log 2)^{n-1} \cdot 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} 2^x (\log 2)^{n-2} \cdot 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 2^x (\log 2)^{n-3} \cdot 6$$

$$= 2^x (\log 2)^n \left\{ x^3 + \frac{3n}{\log 2} x^2 + \frac{3n(n-1)}{(\log 2)^2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{(\log 2)^3} \right\} \quad \text{（答）}$$

$$= 2^x (\log 2)^{n-3} \left\{ (\log 2)^3 x^3 + 3n (\log 2)^2 x^2 + 3n(n-1)(\log 2) x + n(n-1)(n-2) \right\} \quad \text{（答）}$$

5

1) $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left\{ f'(\sin t)\cos t \right\}$

$= \left\{ \dfrac{d}{dt} f'(\sin t) \right\} \cos t + f'(\sin t) \dfrac{d}{dt}\cos t$

$= \underbrace{f''(\sin t)\cos t}_{\text{※1}} \cdot \cos t + f'(\sin t)\cdot(-\sin t)$

$= f''(\sin t)\cos^2 t - f'(\sin t)\sin t$ （答）

2) $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left\{ -\sin(f(t))\, f'(t) \right\}$

$= -\left\{ \dfrac{d}{dt}\sin(f(t)) \right\} f'(t) - \sin(f(t)) \dfrac{d}{dt} f'(t)$

$= -\left\{ \underbrace{\cos(f(t))\, f'(t)}_{\text{※2}} \right\} f'(t) - \sin(f(t))\, f''(t)$

$= -f''(t)\sin(f(t)) - \left\{ f'(t) \right\}^2 \cos(f(t))$ （答）

※1 $\dfrac{d}{dt} f'(\sin t) = \dfrac{d f'(u)}{du} \cdot \dfrac{du}{dt} \quad (u = \sin t)$

$= f''(u)\cos t = f''(\sin t)\cos t$

※2 $\dfrac{d}{dt}\sin(f(t)) = \dfrac{d\sin(v)}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dt} \quad (v = f(t))$

$= \cos v \cdot f'(t) = \cos(f(t)) \cdot f'(t)$

確認作業

$\{\cos(\sin t)\}'' = \{-\sin(\sin t)\cos t\}' = -\cos(\sin t)\cos^2 t + \sin(\sin t)\sin t$

1)の結果に $f = \cos$ を代入すると $\dfrac{d^2z}{dt^2} = -\sin(\sin t)\cos^2 t + \sin(\sin t)\sin t$

∴一致した

2)の結果に $f = \sin$ を代入すると $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sin(t)\sin(\sin t) - \cos^2 t\cos(\sin t)$

∴一致した