微分積分 I　定期試験　問題・答案用紙　（全 3 頁 6 問)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・井上・古閑・田嶋,　2013 年 8 月 2 日 1 限実施

注意：逆三角関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ は, それぞれ, $\arcsin x$, $\arccos x$ $\arctan x$ と書いてもよい。

$\boxed{1}$(30 点) 下記の小問に示した関数 $f(x)$ の 1 次導関数 (1 階導関数) を求めよ。

(1) $f(x) = e^{(x^x)}$　(2) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$　(3) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$　$(a > 0)$

$\boxed{2}$ 以下の小問に答えよ.

(1) (5 点) $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ のとき, $0 \leq \mathrm{Sin}^{-1}a + \mathrm{Sin}^{-1}b \leq \pi$ であることを示せ.

(2) (10 点) $\mathrm{Cos}^{-1}x = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{9}$ をみたす x を求めよ。

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 25 年 8 月 2 日	出題者: 保倉・井上 古閑・田嶋	学 科	学籍番号								氏 名	得 点

$\boxed{3}$(15 点) $f(x)$ が 3 回微分可能のとき, $R = f(x) - (f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3)$ とおく.
3 次導関数 $f'''(x)$ が $\lim_{x \to 0} f'''(x) = f'''(0)$ をみたすとき, ロピタルの定理を 3 回適用して, $\lim_{x \to 0} \dfrac{R}{x^3} = 0$ であることを示せ.

$\boxed{4}$(15 点) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ の, $x = 0$ の近傍での x の 3 次までのテーラー展開を求めよ。剰余項は R と記せ。

微分積分 I　定期試験　問題・答案用紙　(全 3 頁 6 問)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・井上・古閑・田嶋,　2013 年 8 月 2 日 1 限実施

$\boxed{5}$ (10 点) 曲面 $z = 4x^2y + xy^3$ 上の点 $(x, y, z) = (-1, 1, 3)$ における接平面の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき, 以下の小問に答えよ。

(1)(10 点) $z_r = \frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\theta, r\sin\theta), z_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を $z_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), z_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, および, r, θ を用いて表せ。

(2)(5 点) $z = f(x, y)$ が $z = g(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ と書き表される（即ち, $z_\theta = 0$ が成立する) ための必要十分条件は, $yz_x = xz_y$ であることをしめせ。

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 25 年 8 月 2 日	出題者: 保倉・井上 古閑・田嶋	学 科	学籍番号								氏 名	得 点

$\boxed{1}$

(1) $f' = e^{x^x}(x^x)' = e^{x^x} x^x (x\log x)' = e^{x^x} x^x (\log x + 1)$ (答)

(2) $f' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{-4x}{2(1+x^4)} = -\dfrac{2x}{1+x^4}$ (答)

(3) $f' = \sqrt{a^2-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\dfrac{1}{a}$

$= \dfrac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \dfrac{2(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$ (答)

$\boxed{2}$ (2) $\arccos x = \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{7}{9}$

$\Leftrightarrow \quad x = \cos\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{7}{9}\right)$ かつ $\underbrace{0 \leqq \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{7}{9} \leqq \pi}_{\text{(1)で}a=\frac{1}{3},\ b=\frac{7}{9}\text{とした場合なので成立する。}}$

$\Rightarrow x = \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{7}{9}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arcsin\frac{7}{9}\right)$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{2}}{9} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{9}$

$= \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$ (答)

(1) 関数 $y = \arcsin x$ は $\underset{(-1\leqq x\leqq 1)}{0 \leqq x \leqq 1}$ で単調増加する。

$\therefore$ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$\arcsin 0 \leqq \arcsin x \leqq \arcsin 1$

$0 \leqq \arcsin x \leqq \frac{\pi}{2}$

$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ なので

$0 \leqq \arcsin a \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \arcsin b \leqq \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $0 \leqq \arcsin a + \arcsin b \leqq \pi$

3

$$\lim_{x\to 0}\frac{R}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}x-\frac{f''(0)}{2!}x^2-\frac{f'''(0)}{3!}x^3}{x^3}$$

$$\underset{\text{ロピタルの定理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)-f''(0)x-\frac{f'''(0)}{2!}x^2}{3x^2}$$

$$\underset{\text{ロピタルの定理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)-f'''(0)x}{6x}$$

$$\underset{\text{ロピタルの定理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)-f'''(0)}{6}=0$$

$$=\frac{f'''(0)-f'''(0)}{6}=\frac{0}{6}=0$$ （証明終り）

4

$$f(0)=\log 1=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''(0)=2.$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+R$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R$$ （答）

$\boxed{5}$

$$z_x = 8xy + y^3 \qquad m = z_x(\overset{x}{-1}, \overset{y}{1}) = -8+1 = -7$$

$$z_y = 4x^2 + 3xy^2 \qquad n = z_y(-1,1) = 4-3 = 1$$

接平面の方程式は

$$z = z(-1,1) + m(x+1) + n(y-1)$$

$$= 3 - 7(x+1) + (y-1)$$

$$z = -7x + y - 5 \quad (答)$$

$\boxed{6}$ (1)

$$\begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} \qquad \therefore \left.\begin{aligned} z_r &= \cos\theta\, z_x + \sin\theta\, z_y \\ z_\theta &= -r\sin\theta\, z_x + r\cos\theta\, z_y \end{aligned}\right\} 答$$

(2)

$$z_\theta = -r\sin\theta\, z_x + r\cos\theta\, z_y$$

$$= -y\, z_x + x\, z_y = 0$$

$$\therefore \quad y\, z_x = x\, z_y \qquad \therefore z_\theta = 0 \iff y z_x = x z_y$$

問題文より　$z = g(r)$ と表せる $\iff z_\theta = 0$

したがって　$z = g(r)$ と表せる $\iff y z_x = x z_y$