微分積分 I (d)　中間試験　問題・答案用紙　（全 2 枚中の第 1 枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　 2013 年 6 月 28 日 1 限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

$\boxed{1}$ 小問 1)〜10) に示した関数 $f(x)$ の 1 次 (階) 導関数を求めよ。(4 点× 10 問=40 点)

1) $f(x) = \frac{1}{(3x+4)^5} \quad (x \neq -\frac{4}{3})$　　2) $f(x) = x \log x - x \quad (x > 0)$　　3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq n\pi, n$ は整数)

4) $f(x) = e^{-x}\cos(2x)$　　5) $f(x) = \cos(\sin x)$　　6) $f(x) = \arcsin x \quad (|x| < 1)$　　7) $f(x) = \arctan \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

8) $f(x) = 3^{(x^2)}$　　9) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$　　10) $f(x) = \left(\cos x\right)^{\sin x} \quad (\frac{4n-1}{2}\pi \leq x \leq \frac{4n+1}{2}\pi, n$ は整数)

$\boxed{2}$ 小問 1)〜3) に示した式の値を求めよ。(6 点+7 点+7 点=20 点)

1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$　　2) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$　　3) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right)$

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 25 年 6 月 28 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	(第 1 枚目) 得点 /60

微分積分 I (d)　中間試験　問題・答案用紙　（全 2 枚中の第 2 枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　2013 年 6 月 28 日 1 限実施

$\boxed{3}$ 小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ。(10 点+10 点=20 点、ただし、答の値が正しくても、その導出に誤りがあれば、ほとんど得点を与えない。)

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}$, ただし $e = 2.718\cdots$ はネピアの定数 (自然対数の底) である。　　2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\left(e^{(1/x)}-1\right)$

$\boxed{4}$ n を自然数 (1 以上の整数) とするとき、下記の小問 1),2) に答えよ。(10 点+10 点=20 点)

1) $f(x) = e^{3x}$ のとき、$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

2) $g(x) = x^2e^{3x}$ のとき、$g(x)$ の n 次導関数 $g^{(n)}(x)$ を求めよ。

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 25 年 6 月 28 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号								氏名	(第 2 枚目) 得点 /40

解答・解説　（2013. 6. 28 実施分）

$\boxed{1}$ 1) $f' = \{(3x+4)^{-5}\}' = -5(3x+4)^{-6} \cdot \underbrace{(3x+4)'}_{=3} = -15(3x+4)^{-6} = -\dfrac{15}{(3x+4)^6}$ （答）

2) $f' = (x\log x - x)' = x'\log x + x(\log x)' - x' = 1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \log x$ （答）

3) $f' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ （答）　（$\because$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いた）

4) $f' = \{e^{-x}\cos(2x)\}' = (e^{-x})'\cos(2x) + e^{-x}\{\cos(2x)\}'$

$= -e^{-x}\cos(2x) + e^{-x}\{-2\sin(2x)\}$

$= -e^{-x}\{\cos(2x) + 2\sin(2x)\}$ （答）

5) $f' = \{\cos(\sin x)\}' = -\{\sin(\sin x)\}\cdot(\sin x)'$

$= -(\cos x)\cdot\sin(\sin x)$ （答）

6) $f' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （答）

（$\because$ $y = \arcsin x$ とおくと $x = \sin y$, $|y| < \dfrac{\pi}{2}$. $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$

$= \sqrt{1-x^2}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ）

7) $f' = \left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= -\dfrac{1}{1+x^2}$ （答）

8) $f' = \left(3^{x^2}\right)' = 3^{x^2}\log 3 \cdot \underbrace{(x^2)'}_{=2x} = 2x\,3^{x^2}\log 3$ （答）

9) $f' = (x^x)' = x^x(\log x^x)' = x^x(x\log x)' = x^x(\log x + 1)$ （答）

10) $f' = \{(\cos x)^{\sin x}\}' = (\cos x)^{\sin x}\{\log(\cos x)^{\sin x}\}'$

$= (\cos x)^{\sin x}\cdot\{(\sin x)\log(\cos x)\}'$

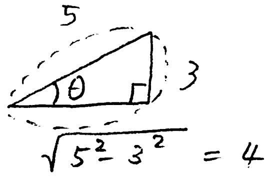
$= (\cos x)^{\sin x}\cdot\left\{(\cos x)\log(\cos x) + (\sin x)\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\right\}$

$= (\cos x)^{\sin x}\cdot\left\{(\cos x)\log(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right\}$ (答)

$= (\cos x)^{\sin x + 1}\{\log(\cos x) - \tan^2 x\}$ (答)

$\boxed{2}$ 1) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ (答)

2) $\theta = \arccos\frac{3}{5}$ とおくと θ は右図で表される：



$\therefore$ (与式) $= \cos\theta = \frac{4}{5}$ (答)

3) $\alpha = \arcsin\frac{1}{2}$ とおくと $\alpha = \frac{\pi}{6}$ であるから

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である

$\beta = \arccos\frac{1}{3}$ とおくと $\cos\beta = \frac{1}{3}$ であり，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ である.

この範囲で $\sin\beta \geqq 0$ なので $\sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(与式) $= \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ (答)

$\boxed{3}$ 1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{x^e}}{\underset{\to\infty}{e^x}} \underset{ロピタル}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e\overset{\to\infty}{x^{e-1}}}{\underset{\to\infty}{e^x}} \underset{ロピタル}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e(e-1)\overset{\to\infty}{x^{e-2}}}{\underset{\to\infty}{e^x}}$

$\underset{ロピタル}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e(e-1)(e-2)\overset{\to 0}{x^{e-3}}}{\underset{\to\infty}{e^x}} = 0$ (答)

$\left(\because \lim_{x\to\infty} x^s = \begin{cases}\infty & (s>0のとき)\\ +0 & (s<0のとき)\end{cases}\right.$ を使った $\Big)$

$\boxed{3}$ 2)
$$\lim_{x\to\infty}(x+1)(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(e^{1/x}-1)}^{\to 1-1=0}}{\underbrace{\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\to \frac{1}{\infty}=0}}$$

$$\underset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\lim_{x\to\infty}e^{\overset{\to 0}{1/x}}\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0}\Big)^2=\underbrace{e^0}_{=1}\cdot(1+0)^2=1 \text{ (答)}$$

$\boxed{4}$ 1)
$$f=e^{3x}$$
$$f'=3e^{3x}$$
$$f''=3\cdot 3e^{3x}=3^2e^{3x}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}=3^n e^{3x} \text{ (答)}$$

2) ライプニッツの公式を使って

$$g^{(n)}=\binom{n}{0}x^2(e^{3x})^{(n)}+\binom{n}{1}(x^2)^{(1)}(e^{3x})^{(n-1)}+\binom{n}{2}(x^2)^{(2)}(e^{3x})^{(n-2)}$$
$$=1\cdot x^2\cdot 3^n e^{3x}+n\cdot 2x\cdot 3^{n-1}e^{3x}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 3^{n-2}e^{3x}$$
$$=3^{n-2}e^{3x}\{9x^2+6nx+n(n-1)\} \text{ (答)}$$
$$=3^n e^{3x}\left\{x^2+\frac{2}{3}nx+\frac{n(n-1)}{9}\right\} \text{ (答)}$$

部分点

$$g'=(3x^2+2x)e^{3x}$$
$$g''=(9x^2+12x+2)e^{3x}$$
$$g'''=9(3x^2+6x+2)e^{3x}=(27x^2+54x+18)e^{3x}$$
$$g^{(4)}=27(3x^2+8x+4)e^{3x}=(81x^2+216x+108)e^{3x}$$
$$g^{(5)}=27(9x^2+30x+20)e^{3x}=(243x^2+810x+540)e^{3x}$$