微分積分 I　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・井上・古閑,　2012 年 8 月 3 日 1 限実施

注意：逆正弦関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ および 逆余弦関数 $\mathrm{Cos}^{-1}x$ は, それぞれ, $\arcsin x$ および $\arccos x$ と書いてもよい。

$\boxed{1}$ 下記の小問に示した関数 $f(x)$ の 1 次導関数 (1 階導関数) を求めよ。(30 点)

(1) $f(x) = \frac{x \log x}{x+1}$　　(2) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}$　　(3) $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$

$\boxed{2}$ $\sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{5}\right)$ の値を求めよ。(10 点)

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 24 年 8 月 3 日	出題者: 田嶋・保倉 井上・古閑	学 科	学籍番号								氏 名	(第 1 頁目) 得 点　/40

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin x-\cos x+1}{x^3}$ を求めよ。(10 点)

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ の, $x=0$ の近傍での x の 3 次までのテーラー展開を求めよ。剰余項は R_4 と記せ。(10 点)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・井上・古閑,　2012 年 8 月 3 日 1 限実施

$\boxed{5}$ $f(x) = e^x \cos x, \quad g_n(x) = 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$　とし, $f^{(n)}$ を f の n 次（階）導関数とするとき, ゼロ以上の任意の整数 n について　$f^{(n)}(x) = g_n(x)$　が成立することを証明せよ。　(15 点)

$\boxed{6}$ 2 変数関数 $f(x,y)=1+2x+3y+4x^5y^3$ について以下の小問に答えよ。　(15 点)

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の, 点 $x=1$, $y=-1$, $z=-4$ における接平面の方程式を求めよ。

(2) f の 2 次 (階) の偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

$\boxed{7}$ $z=f(x,y)$, $u=2x+3y$, $v=5x+7y$ のとき, z_u, z_v を z_x, z_y を用いて表せ。　ただし, $z_x=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $z_y=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ であり, また, z を x,y を使わずに u, v だけで表してから u で偏微分した結果が z_u であり, v で偏微分した結果が z_v である。(10 点)

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 24 年 8 月 3 日	出題者: 田嶋・保倉 井上・古閑	学 科	学籍番号								氏 名	(第 4 頁目) 得 点　/25

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) 関数の商の微分公式 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$，関数の積の微分公式 $(f\cdot g)' = f'g + fg'$，微分公式 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ を利用すると．

$$f'(x) = \frac{(x\log x)'(x+1) - (x\log x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\{x'\log x + x(\log x)'\}(x+1) - (x\log x)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x})(x+1) - x\log x}{(x+1)^2} = \frac{(\log x + 1)(x+1) - x\log x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\log x + x + 1}{(x+1)^2} \quad (答)$$

(2) 微分公式 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，合成関数の微分公式 を利用すると．

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} \quad (答) \quad = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \quad (答')$$

(注意) $x>0$ のとき $\frac{x}{|x|}=1$ だが，$x<0$ のときは $\frac{x}{|x|}=-1$ なので．$\frac{x}{|x|}=1$ とおきかえては正しくない。

(3) 対数微分法 $f' = f(\log f)'$，関数の積の微分公式，合成関数の微分公式，微分公式 $(\log x)' = \frac{1}{x}$，$(\sin x)' = \cos x$，$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ を利用すると

$$f'(x) = (\sin x)^{\tan x}\left[\log\{(\sin x)^{\tan x}\}\right]' = (\sin x)^{\tan x}\{\tan x\,\log(\sin x)\}'$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left\{(\tan x)'\log(\sin x) + \tan x\left(\log\sin x\right)'\right\}$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left\{\frac{1}{\cos^2 x}\log(\sin x) + \underbrace{\tan x}_{=\frac{\sin x}{\cos x}}\frac{1}{\sin x}(\sin x)'\right\}$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left\{\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\sin x}\cos x\right\}$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left\{\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + 1\right\} \quad (答)$$

[補足]

$\boxed{1}$(2) $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos|x|$ ，$\{|x|\}' = \frac{x}{|x|}$ $(x\neq 0)$ を使っても答は得られる。

2. $\alpha = \arccos\frac{1}{2}$ とおくと

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

［「$\alpha = \frac{\pi}{3}$」は答を求めるのには不要だが、「$\alpha = \frac{\pi}{3}$」と書いていれば部分点（3点ぐらい）を与えたい］

$\beta = \arcsin\frac{1}{5}$ とおくと

$$\sin\beta = \frac{1}{5},\quad -\pi \leqq \beta \leqq \pi,\quad \cos\beta = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$(与式) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{6\sqrt{2}+1}{10} \quad (答)$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\log(1-x)+\sin x-\cos x+1}^{\to 0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0}} \underset{\substack{\uparrow\\ ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\log(1-x)+\sin x-\cos x+1)'}{(x^3)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{-1}{1-x}+\cos x+\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{3x^2}_{\to 0}} \underset{\substack{\uparrow\\ ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{-\frac{1}{(x-1)^2}-\sin x+\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{6x}_{\to 0}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(x-1)^3}-\cos x-\sin x}{6} = \frac{-2-1-0}{6} = -\frac{1}{2} \quad (答)$$

［別解法］テーラー展開を利用すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin x-\cos x+1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\overset{大}{O}(x^4)+x-\frac{x^3}{6}+\overset{大}{O}(x^5)-1+\frac{x^2}{2}+\overset{大}{O}(x^4)+1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3+\overset{大}{O}(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left\{-\frac{1}{2}+\underbrace{\overset{大}{O}(x)}_{\to 0}\right\} = -\frac{1}{2} \quad (答)$$

4. $$f(x) = e^{-\frac{x}{2}},\quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},\quad f'(0) = -\frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}},\quad f''(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 e^0 = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 e^{-\frac{x}{2}},\quad f'''(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 e^0 = -\frac{1}{8}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + R_4$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + R_4 \quad (答)$$

$\boxed{6}$ (1)

$$z = 1 + 2x + 3y + 4x^5y^3$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 20x^4y^3 \qquad \therefore z_x(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{1}}, \overset{y}{\overset{\shortparallel}{-1}}) = 2 - 20 = -18$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3 + 12x^5y^2 \qquad \therefore z_y(1, -1) = 3 + 12 = 15$$

接平面の方程式は.

$$z = z_x(1,-1)\cdot(x-1) + z_y(1,-1)\cdot(y+1) - 4$$

$$= -18(x-1) + 15(y+1) - 4$$

$$\therefore z = -18x + 15y + 29 \quad (答).$$

(2) $$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z_x = \frac{\partial}{\partial x}(2 + 20x^4y^3) = 80x^3y^3 \quad (答)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} z_x = \frac{\partial}{\partial y}(2 + 20x^4y^3) = 60x^4y^2 \quad (答)$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} z_y = \frac{\partial}{\partial y}(3 + 12x^5y^2) = 24x^5y \quad (答)$$

$\boxed{7}$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$x_u = \frac{\partial}{\partial u}(-7u + 3v) = -7, \quad x_v = \frac{\partial}{\partial v}(-7u + 3v) = 3$$

$$y_u = \frac{\partial}{\partial u}(5u - 2v) = 5, \quad y_v = \frac{\partial}{\partial v}(5u - 2v) = -2$$

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = -7z_x + 5z_y \quad (答)$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = 3z_x - 2z_y \quad (答)$$

[別解法]

$u = 2x + 3y$ より $u_x = 2$, $u_y = 3$.

$v = 5x + 7y$ より $v_x = 5$, $v_y = 7$.

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = 2z_u + 5z_v$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = 3z_u + 7z_v$$

$$\therefore \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

$$\therefore z_u = -7z_x + 5z_y \quad (答)$$

$$z_v = 3z_x - 2z_y \quad (答)$$

$\boxed{5}$ は皆さんにじっくり考えてもらうために予告出題した問題ですので解答は公開しません。どうしても教えて欲しい人は数学学習支援室のT.A.(大学院生)に聞いて下さい。

$\boxed{4}$ の別解

指数関数のテーラー展開式 $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \overset{\text{大}}{O}(y^4)$ に $y = -\frac{x}{2}$ を代入すると

$$e^{-x/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \overset{\text{大}}{O}\left(\left(-\frac{x}{2}\right)^4\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \underbrace{\overset{\text{大}}{O}(x^4)}_{=R_4} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{7}$ についてよくある誤解

誤解その1

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

正しくは $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}$ である。

∵ 合成関数の微分公式IIにより成り立つ2式、

$$\begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix}$$

より明らか。

誤解その2

$u = 2x + 3y$

$\therefore x = \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}y$

$\therefore x_u = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}u - \frac{3}{2}y\right) = \frac{1}{2}$

左の x_u は、x を u と y の関数とみたときの u による偏微分である(これを「$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_y$」と書き表すことがある。)

一方, 問題 $\boxed{7}$ で必要とされる x_u は, x を u と v の関数と見たときの u による偏微分である. (これは「$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v$」と書き表すことがある)

そして、一般に、両者は異なる量である.

上の誤答を正しく採れば

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v = \left.\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}u - \frac{3}{2}y\right)\right|_v = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial u}\right|_v - \frac{3}{2}\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{3}{2}\cdot 5 = -7$$ となる。

但し $\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v$ は $y = 5u - 2v$ を使って求めた。