微分積分 I (a)　中間試験　問題・答案用紙　（全 2 枚中の第 1 枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　2012 年 6 月 29 日 1 限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している.

$\boxed{1}$ 下記の小問 1)〜3) に示した式の値を求めよ. (10 点× 3=30 点)

1) $\arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \arctan \dfrac{1}{5}\right)$　　3) $\sin\left(2\arccos \dfrac{1}{6}\right)$

$\boxed{2}$ 下記の小問 1), 2) に答えよ. (15 点× 2=30 点)

1) 整数 $n \geq 1$ に対し, $\log x$ の n 次導関数 $(\log x)^{(n)}$ を簡単な 1 個の数式で表せ. （場合分けせず, 代わりに, (-1) のべき乗を使え. また,「$\cdots$」や総乗記号「Π」を使わず, 代わりに, 階乗記号 「!」 を使え. ）

2) 整数 $n \geq 2$ に対し, $f(x) = x\log x$ の n 次導関数 $\{f(x)\}^{(n)}$ を, できる限り簡単な 1 個の数式で表せ.

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 24 年 6 月 29 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点 (第 1 枚目) /60

$\boxed{3}$ 下記の小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ. ただし, $\cot X = \frac{1}{\tan X}$ である. (15 点× 2=30 点)

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{\arctan x - x}$　　　2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}\right)^{\cot\frac{x}{5}}$

$\boxed{4}$ 3 個の変数 x, y, z の間には, 3 回微分可能な関数 f と g を使って表される $z = f(y)$, $y = g(x)$ という関係がある.
このとき, $\dfrac{d^3 z}{dx^3}\left(= \dfrac{d^3 f\left(g\left(x\right)\right)}{dx^3}\right)$ を, $\dfrac{d^3 z}{dy^3}$, $\dfrac{d^2 z}{dy^2}$, $\dfrac{dz}{dy}$, $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表せ. (10 点)

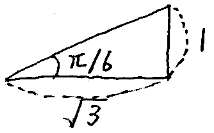
ヒント: まず, $\frac{d^2 z}{dx^2}\left(= \frac{d^2 f(g(x))}{dx^2}\right)$ を, $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ を用いて表せ. これは教科書と同じ問題. (ここ迄出来たら 10 点中 5 点.)

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 24 年 6 月 29 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点 /40 (第 2 枚目)

【解答・解説】 '12.6.29 実施分

$\boxed{1}$

(1) 

左図より $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

(2) $\theta = \arctan\frac{1}{5}$ とおくと、$\tan\theta = \frac{1}{5}$.

$$\therefore\ (\text{与式}) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \underset{\text{加法定理}}{=} \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-1\cdot\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$$

(3) $\theta = \arccos\frac{1}{6}$ とおくと、$\cos\theta = \frac{1}{6}$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では $\sin\theta \geqq 0$ なので $\sin\theta = +\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$$\therefore\ (\text{与式}) = \sin(2\theta) \underset{\text{倍角公式}}{=} 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{35}}{18}$$

$\boxed{2}$

(1) $$(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = \left\{(-1)x^{-2}\right\}^{(n-2)} = \left\{(-1)(-2)x^{-3}\right\}^{(n-3)} = \cdots$$

$$= \left\{(-1)(-2)\cdots\cdots(-(n-1))\,x^{-n}\right\}^{(n-n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

上の導出は n が十分大きい ($n \geqq 5$) として説明しているが、得られた結果は $n \geqq 1$ で成り立つことが確かめられる。例えば $n=1$ のとき (結果の式) $= (-1)^{-1}\,0!\,x^{-1} = \frac{1}{x} = (\log x)'$ (注: $0! = 1$) となり成立している。

(2) $$\{f(x)\}^{(n)} = \binom{n}{0} x (\log x)^{(n)} + \binom{n}{1}(x)'(\log x)^{(n-1)} \quad (\because\ r \geqq 2 \text{ のとき } (x)^{(r)} = 0)$$

$$= 1\cdot x\,(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n} + n\cdot 1\cdot(-1)^{(n-1)-1}((n-1)-1)!\,x^{-(n-1)}$$

$$= \underbrace{(-1)^{n-1}}_{-(-1)^n}\ \underbrace{(n-1)!}_{(n-1)(n-2)!}\,x^{-n+1} + n\cdot(-1)^{n-2}(n-2)!\,x^{-n+1}$$

$$= (-1)^n (n-2)!\,x^{-n+1}\left\{\underbrace{-(n-1)+n}_{1}\right\}$$

$$= (-1)^n (n-2)!\,x^{-n+1}$$

(2)の別解

$f = x\log x$, $f^{(1)} = \log x + 1$, $f^{(2)} = \frac{1}{x} = (\log x)^{(1)}$

$\therefore\ n \geqq 2$ のとき $f^{(n)} = (f^{(2)})^{(n-2)} = \left((\log x)^{(1)}\right)^{(n-2)} = (\log x)^{(n-1)}$

$= (-1)^{(n-1)-1}((n-1)-1)!\,x^{-(n-1)} = \underbrace{(-1)^{n-2}}_{(-1)^n}(n-2)!\,x^{-n+1}$ (答)

[3]

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 0}{\arcsin x - x}}{\underset{\searrow 0}{\arctan x - x}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}}{\underset{\searrow 0}{\frac{1}{1+x^2}-1}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1+x^2)^2}{2\ (1-x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}$$

exp と log は互いに逆関数の関係にある。

(2)

$$\lim_{x\to +0}\underbrace{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}\right)}_{\to 1+0}^{\cot\frac{x}{5}\nearrow+\infty} = \lim_{x\to +0}\exp\log\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}\right)^{\cot\frac{x}{5}}$$

$$= \exp\lim_{x\to +0}\underset{\downarrow +\infty}{\cot\frac{x}{5}}\ \underbrace{\log\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}\right)}_{\to 0} = \exp\lim_{x\to +0}\frac{\overset{\nearrow 0}{\log\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}\right)}}{\underset{\searrow 0}{\tan\frac{x}{5}}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \exp\lim_{x\to +0}\frac{\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}} = \exp\frac{\frac{\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0}{0+1}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1}} = e^{5/2}$$

[4]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$ （∵合成関数の微分公式）

関数の積の微分公式

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$$

合成関数の微分公式

$$= \left\{\left(\frac{d}{dy}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}$$ （ここ迄で5点を与える。）

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

関数の積の微分公式

$$= \left(\frac{d}{dx}\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\qquad \|※1 \qquad\qquad\qquad \|※2 \qquad\qquad\qquad \|※3$$

$$= \frac{d^3z}{dy^3}\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dy^2}\,2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$= \frac{d^3z}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2z}{dy^2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}$$

※1： $\frac{d}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d}{dy}\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^3z}{dy^3}\frac{dy}{dx}$． ※3： $\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy} = \left(\frac{d}{dy}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}$．

※2： $u = \frac{dy}{dx}$ とおくと、$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d}{du}u^2\right)\frac{du}{dx} = 2u\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$．