微分積分 I (a,b,c,d クラス共通) 定期試験問題

2011年 8月5日 1限実施

[1] 次の関数の導関数を求めよ.

1. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $\quad(-1<x<1)$ $\quad$ (10点)
2. $f(x) = x^{\cos x}$ $\quad(x>0)$ $\quad$ (10点)
3. $f(x) = \arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ $\quad(-1<x<1)$ $\quad$ (10点)

[2] $f(x) = 3^x x^2$ の n 次(階)導関数を求めよ. $(n \geqq 0)$ $\quad$ (10点)

[3] $y = \arctan x$ の高次(階)導関数 $y^{(n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ が成立することを n についての数学的帰納法で証明せよ。(10点)

[4] 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+x-e^x}$ を求めよ。

[5] 以下に与える関数 $f(x)$ の $x=0$ の近傍でのテーラー展開を、指定された次数まで求めよ。剰余項は R_n 等の記号で略記してよい.

1. $f(x) = x\cos x$, x の3次まで. $\quad$ (10点)
2. $f(x) = \log(1+x)$, x の n 次まで. $(n \geqq 1)$ $\quad$ (10点)

[6] 2変数関数 $f(x,y) = x^3y + xy^2$ の2次(階)の偏導関数を全て求めよ。(10点)

[7] $z = f(x,y)$ を全微分可能な関数とする。変数変換

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

により z を (r,θ) を変数とする関数として見たときの偏導関数 z_θ, z_r を z_x, z_y, r, θ を用いて表せ。次に z_θ, z_r を z_x, z_y, x, y を用いて表せ。但し $r>0$ とする。(10点)

微分積分 I　2011年度前期 定期試験解答

$\boxed{1}$

1. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = (x)'\sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \quad (\because \text{関数の積の微分公式})$$
$$= 1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{答})$$

[補足説明]　$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$ の求め方：

$t=1-x^2$ とおくと、　$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{d}{dx}t^{1/2} = \frac{dt^{1/2}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ （∵合成関数の微分法）

$= \frac{1}{2}t^{-1/2}\cdot(-2x) = \frac{-x}{t^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $f(x) = x^{\cos x}$

$$f'(x) = f(x)\cdot\{\log f(x)\}' \quad (\because \text{対数微分法})$$
$$= x^{\cos x}(\cos x\cdot\log x)'$$
$$= x^{\cos x}\left\{(\cos x)'\log x + \cos x\,(\log x)'\right\} \quad (\because \text{積の微分公式})$$
$$= x^{\cos x}\left(-\sin x\log x + (\cos x)\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x\log x\right) \quad (\text{答})$$

(注意)　$g(x)^{h(x)}$ の形をした実関数は $g(x)$ が正となる x の範囲だけを考えればよい。この問の場合は $x>0$ となる。また $x^{\cos x}>0$ である。したがって対数微分法の公式 $f'=f(\log|f|)'$ の絶対値記号を書かなくてもよいのである。

3. $f(x) = \arctan\frac{1-x}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$$
$$= -\frac{1}{1+x^2} \quad (\text{答})$$

(説明)
$u=\frac{1-u}{1+x}$ とおくと
$$f' = \frac{d\arctan u}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
(∵合成関数の微分法)
$$= \frac{1}{1+u^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

2 $f(x)=3^x x^2$, ライプニッツの公式により、 $(x^2)^{(k)}=0$ $(k \geqq 3)$ に注意して

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(3^x)^{(n)}(x^2)^{(0)} + \binom{n}{1}(3^x)^{(n-1)}(x^2)^{(1)} + \binom{n}{2}(3^x)^{(n-2)}(x^2)^{(2)}$$

$$= 1\cdot 3^x(\log 3)^n x^2 + n\,3^x(\log 3)^{n-1}2x + \frac{n(n-1)}{2}3^x(\log x)^{n-2}\cdot 2$$

$$= 3^x(\log 3)^{n-2}\left\{(\log 3)^2 x^2 + 2n(\log 3)x + n(n-1)\right\} \quad \text{(答)}$$

(注意) $(\log 3)^2$ を $\log^2 3$ と書くのは一般的な記法ではないので止めましょう。

3 皆さんにじっくりと考えてもらうため事前に予告した問題ですので解答は公開しません。どうしてもわからないときは、数学支援室の大学院生に聞いてヒントを教えてもらって下さい。

4
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x+\overset{\text{大}}{O}(x^3))}{1+x-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\overset{\text{大}}{O}(x^3))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\overset{\text{大}}{O}(x^4)}{-\frac{1}{2}x^2+\overset{\text{大}}{O}(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\overset{\text{大}}{O}(x^2)}{-\frac{1}{2}+\overset{\text{大}}{O}(x^3)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{(答)}$$

(別解)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{1+x-e^x}_{\to 0}} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sin x + x\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{1-e^x}_{\to 0}} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x - x\sin x}{-e^x}$$

$$= \frac{1+1-0}{-1} = -2 \quad \text{(答)}$$

(別解)'

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1}\cdot\frac{\overbrace{x^2}^{\to 0}}{\underbrace{1+x-e^x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x^2}^{\to 0}}{\underbrace{1+x-e^x}_{\to 0}} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2x}^{\to 0}}{\underbrace{1-e^x}_{\to 0}}$$

$$\underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{-e^{-x}} = \frac{2}{-1} = -2 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{5}$

1. $f(x) = x\cos x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x - x\sin x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -2\cos x - \cos x + x\sin x = -3\cos x + x\sin x$, $f'''(0) = -3$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + R_4$$

$$= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-3}{6}x^3 + R_4$$

$$= x - \frac{1}{2}x^3 + R_4 \quad (答)$$

(別解)

$$f(x) = x\cos x = x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \overset{\text{大}}{O}(x^4)\right) = x - \frac{1}{2}x^3 + \overset{\text{大}}{O}(x^5)$$

2. $f(x) = \log(1+x)$, $f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = \left\{(x+1)^{-1}\right\}^{(n-1)} = (-1)\cdot(-2)\cdots(-(n-1))\,(x+1)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1-x)^{-n}$

$\therefore f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\,(-1)^{k-1}}{k!}x^k + R_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + R_{n+1} \quad (答)$$

Σ記号を使わずに以下の①または②のように書き表しても正解としました。

① $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}$

② nが偶数のとき

$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + R_{n+1}$

nが奇数のとき

$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{1}{n}x^n + R_{n+1}$

(別解) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

6 $f(x,y) = x^3y + xy^2$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + xy^2) = \frac{\partial x^3}{\partial x}y + \frac{\partial x}{\partial x}y^2 = 3x^2y + y^2$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + xy^2) = x^3\frac{\partial y}{\partial y} + x\frac{\partial y^2}{\partial y} = x^3 + 2xy$$

これらは1次(階)の導関数なので、これらには点を与えなかった。

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y + y^2) = 3\frac{\partial x^2}{\partial x}y + 0\cdot y^2 = 6xy \text{ (答)}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}f_x = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + y^2) = 3x^2\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial y} = 3x^2 + 2y \text{ (答)}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}f_y = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy) = \frac{\partial x^3}{\partial x} + 2\frac{\partial x}{\partial x}y = 3x^2 + 2y \text{ (答)}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2xy) = x^3\cdot 0 + 2x\frac{\partial y}{\partial y} = 2x \text{ (答)}$$

ただし $f_{xy} = f_{yx}$ を使って f_{xy} と f_{yx} のうち片方だけを計算するのでも良い

7

$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta \text{ (答)}$$

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta \text{ (答)}$$

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\cdot 1 = r^2$$

極座標では $r \geq 0$ にとるので $r = \sqrt{x^2+y^2}$。 $r > 0$ $(r \neq 0)$ で、

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\therefore \quad z_\theta = -y z_x + x z_y \text{ (答)}$$

$$z_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x z_x + y z_y) \text{ (答)}$$ …但し $r>0$ のとき