微分積分 I (c)　中間試験　問題・答案用紙　（全2枚中の第1枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1年生対象, 担当教員 田嶋,　2011年6月24日1限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

$\boxed{1}$ 小問 1)〜10) に示した関数 $f(x)$ の1次 (階) 導関数を求めよ。(4点× 10問=40点)

1) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3} \quad (x \neq -\frac{1}{2})$　2) $f(x) = \log|3x+5| \quad (x \neq -\frac{5}{3})$　3) $f(x) = \tan x \quad (x \neq (n+\frac{1}{2})\pi, n$ は整数$)$

4) $f(x) = e^{2x}\sin(3x)$　5) $f(x) = \sin(\cos x)$　6) $f(x) = \arcsin x \quad (|x| < 1)$　7) $f(x) = \arctan x$

8) $f(x) = 2^{(x^2+x)} \quad (x > 0)$　9) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$　10) $f(x) = (\arctan x)^x \quad (x > 0)$

$\boxed{2}$ 小問 1)〜3) に示した式の値を求めよ。(6点+7点+7点=20点)

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$　2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$　3) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4}\right)$

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成23年 6月24日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号								氏名	(第1枚目) 得点 /60

$\boxed{3}$ 小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ。(10点+10点=20点)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$　　　2) $\lim_{x \to +0} x^x$

$\boxed{4}$ 下記の小問 1),2) に答えよ。(10点+10点=20点)

1) $f(x) = \cos(3x)$ のとき、$f(x)$ の n 次導関数 $\{f(x)\}^{(n)}$ を求めよ。

2) $g(x) = x^2 \cos(3x)$ のとき、$g(x)$ の n 次導関数 $\{g(x)\}^{(n)}$ を求めよ。

裏面にも答を書いて良い

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成23年 6月24日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号								氏 名	(第2枚目) 得 点　/40

[1] 軽微な計算ミスは −1点、軽微でないミスはひとつ −2点、重大なミスは −4点。

1) $t = 2x+1$ とおくと、$f = t^{-3}$。 $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \left(\dfrac{d}{dt}t^{-3}\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(2x+1) = -3t^{-4}\cdot 2$

$$= -6t^{-4} = -\frac{6}{(2x+1)^4}$$

2) $t = 3x+5$ とおくと、$f = \log|t|$。

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\cdot\frac{d}{dx}(3x+5) = \frac{1}{t}\cdot 3 = \frac{3}{3x+5}$$

[$\dfrac{3}{|3x+5|}$ と答えたら、−2点。]

3) 関数の商の微分公式 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ を利用して

$$f' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

4) 関数の積の微分公式 $(f\cdot g)' = f'g + f\cdot g'$ を利用して

$$f' = (e^{2x}\cdot\sin 3x)' = (e^{2x})'\sin 3x + e^{2x}\cdot(\sin 3x)'$$

$$= 2e^{2x}\cdot\sin 3x + e^{2x}\cdot 3\cos 3x = e^{2x}\cdot(2\sin 3x + 3\cos 3x)$$

5) $t = \cos x$ とおくと、合成関数の微分公式により、

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\sin t = \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\cdot\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos t\cdot(-\sin x) = -(\sin x)\cdot\cos(\cos x)$$

6) $f' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （基本的な公式として確かに記憶しているなら答をいきなり書くだけでよい。）

もし「結果を導出せよ」と求められたら、逆関数の微分公式を利用して、

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

このとき $\cos y \geqq 0$ なので $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\sin y = \cos y = \sqrt{1-x^2}. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{1}$（続き）

7) $f' = (\arctan x)' = \underline{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

この公式を導くには、逆関数の微分公式を利用する。即ち

$y = \arctan x \iff x = \tan y$ かつ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d}{dy}(\tan y) = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ （∵ 小問 3)）

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ の両辺を $\cos^2 y$ で割ると $1 + \tan^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$\therefore \dfrac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \underline{\dfrac{1}{1+x^2}}$

8) $t = x^2 + x$ とおくと $f = 2^t$.

$f' = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}2^t = \left(\dfrac{d}{dt}2^t\right) \cdot \dfrac{dt}{dx} = 2^t \log 2 \cdot (2x+1)$

$= \underline{(2x+1)\, 2^{x^2+x} \log 2}$

9) 対数微分法により

［一般に $a>0$, $b>0$ のとき $\log a^b = b \log a$］

$f' = f \cdot (\log f)' = x^x \cdot (\log x^x)' = x^x (x \log x)'$

$= x^x \left(1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = \underline{x^x \cdot (\log x + 1)}$

関数の積の微分法

10) 対数微分法により

$f' = f \cdot (\log f)' = (\arctan x)^x \left[\log\{(\arctan x)^x\}\right]'$

$= (\arctan x)^x \cdot \{x \log(\arctan x)\}'$

関数の積の微分公式

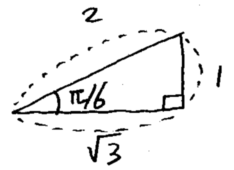
$\dfrac{d}{dx}\log(\arctan x)$ を合成関数の微分法で求めたもの

$= (\arctan x)^x \cdot \left\{1 \cdot \log(\arctan x) + x \cdot \overbrace{\dfrac{1}{\arctan x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}}\right\}$

$= \underline{(\arctan x)^x \left\{\log(\arctan x) + \dfrac{x}{(1+x^2)\arctan x}\right\}}$

$\boxed{2}$

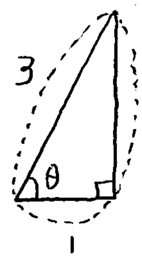
1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\because$



[「$\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$」と答えたら −3点.
「$\pm\frac{\pi}{6}$」と答えたら −3点.]

2) $\sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\because$

[$\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ と答えたら −3点.]



$\sqrt{3^2-1^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \arccos\frac{1}{3}$

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

あるいは 3)の答の前半のようにして
数式操作だけで求めることもできる。

3) $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ とおくと.

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ かつ $0 \leqq \alpha \leqq \pi$. このとき $\sin\alpha \geqq 0$ なので

$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\beta = \arccos\frac{1}{4}$ とおくと.

$\cos\beta = \frac{1}{4}$ かつ $0 \leqq \beta \leqq \pi$. このとき $\sin\beta \geqq 0$ なので

$\sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

三角関数の加法定理

$(与式) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$

$\boxed{3}$

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(2x)'}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

2) $y = x^x$ とおくと. $\log y = x\log x$. $y = e^{\log y}$ なので

$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} e^{\log y} = \exp\left(\lim_{x\to+0}\log y\right)$.

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y = \lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = (※)$

(続く)

3 2) (続き)

$$(※) = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} (-x) = 0.$$

$$\therefore \lim_{x \to +0} y = \exp\left(\lim_{x \to +0} \log y\right) = \exp(0) = e^0 = \underline{1}$$

4

1) 公式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ を利用する。

$t = 3x$ とおくと $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dt} \frac{dt}{dx} = 3 \frac{d}{dt} f(x)$

$$\therefore \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \left(3 \frac{d}{dt}\right)^n f(x) = 3^n \frac{d^n}{dt^n} f(x)$$

$$\therefore f(x)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^2} f(x) = 3^n \frac{d^n}{dt^n} \cos t = 3^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \underline{3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

2) ライプニッツの公式を利用して、$f(x) = \cos(3x)$ と書くと

$$g^{(n)}(x) = \binom{n}{0} f^{(n)}(x)\, x^2 + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot x^2 + n \cdot 3^{n-1} \cos\left(3x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \cdot 2x$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \cos\left(3x + \frac{n-2}{2}\pi\right) \cdot 2$$

$$= 3^{n-2} \left\{ 9x^2 \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 6nx \underbrace{\cos\left(3x + \frac{n-1}{2}\pi\right)}_{= \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right)} + n(n-1) \underbrace{\cos\left(3x + \frac{n-2}{2}\pi\right)}_{= -\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)} \right\}$$ (答)

$$= \underline{3^{n-2} \left\{ (9x^2 - n(n-1)) \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 6nx \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \right\}}$$ (答)