1. 次の計算をせよ (各 10 点/計 30 点)。注意： $\mathrm{Sin}^{-1}x$ は、講義では $\arcsin x$ と記した関数である.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}(x)}{x-x\cos(x)}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}x^x$

2. 次の各問に答えよ (各 10 点/計 30 点)。

(1) 関数 e^x について、n 次までの 有限マクローリン展開(即ち、$x=0$ における有限テーラー展開) を求めよ。ただし、剰余項は R_{n+1} と略記せよ。

(2) 関数 $\sqrt{1+x}$ について、3 次までの 有限マクローリン展開 を求めよ。ただし、剰余項は R_4 と略記せよ。

(3) 関数 $(1+x)^3$ について、3 次までの 有限マクローリン展開 を求めよ。この場合、剰余項 R_4 は x に依存しない定数になることを示せ。また、その定数値を求めよ。

3. 次の各問に答えよ (各 10 点/計 40 点)。

(1) $z = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を計算せよ。

(2) $z = \sin(x^2y)$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を計算せよ。

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく。$\dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial y}{\partial r},\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ を計算せよ。

(4) $z = f(x, y)$ が全微分可能、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ のとき、(3) の結果を用いて、$\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ をそれぞれ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の一次式として表せ。さらに、$\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ であることを多項式計算により示せ。

学籍番号

氏名

得点

1. 次の計算をせよ(各10点/計30点)。注意: $\mathrm{Sin}^{-1}x$ は、講義では $\arcsin x$ と記した関数である.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}(x)}{x-x\cos(x)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$ (3) $\displaystyle\frac{d}{dx}x^x$

(1)

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-x\cos x}$$

と書く.

$x\to 0$ で $\begin{cases} x-\arcsin x \to 0-0=0 \\ x-x\cos x \to 0-0\cdot 1=0 \end{cases}$

なのでロピタルの定理が適用できて、

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\arcsin x)'}{(x-x\cos x)'}$$ ↑1点.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\cos x+x\sin x}$$ ↑3点.

$x\to 0$ で $\begin{cases} 1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{1}{\sqrt{1}}=0 \\ 1-\cos x+x\sin x=1-1+0\cdot 0=0 \end{cases}$

なのでロピタルの定理が適用できて、

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'}{(1-\cos x+x\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)}{\sin x+\sin x+x\cos x}$$ ↑6点.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x(1-x^2)^{-3/2}}{2\sin x+x\cos x}$$

[→この後、もう一回ロピタルの定理を使って求めてもよい]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)^{-3/2}}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}$$

$$=\frac{-(1-0)^{-3/2}}{2\cdot 1+1}\quad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$$=-\frac{1}{3}$$ (答) ↑10点.

(1)の別解

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+O(x^5)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)$$

$\arcsin 0=0$, $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+O(x^4)$ より $\arcsin x=\int_0^x\{1+\frac{1}{2}t^2+O(t^4)\}dt=x+\frac{1}{6}x^3+O(x^5)$

↑5点.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x-\frac{1}{6}x^3-O(x^5)}{x-x(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3-O(x^5)}{\frac{1}{2}x^3+O(x^5)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}-O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x^2)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}$$ (答)

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2^x-3^x}^{\to 1-1=0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}\underset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2-3^x\log 3}{1}=\log 2-\log 3$$

$$=\log\frac{2}{3}$$ (答)

(注意) $\lim_{x\to 0}a^x=1$ ($\forall a>0$)

(3)

$$\frac{d}{dx}x^x=x^x\frac{d}{dx}\log x^x=x^x\frac{d}{dx}x\log x$$

↑対数微分法

$$=x^x\left(1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\log x+1)$$ (答)

(3)の別解

$$\frac{d}{dx}x^x=\frac{d}{dx}\left(e^{\log x}\right)^x=\frac{d}{dx}e^{x\log x}$$

$$=\left(\frac{d}{dt}e^t\right)\cdot\frac{d}{dx}x\log x \quad (t=x\log x\text{ とおいた})$$

$$=e^t(\log x+1)=x^x(\log x+1)$$ (答)

(注意) exp と log は互いに逆関数の関係にあるので

$\begin{cases}\forall x>0,\ \exp(\log x)=x \\ \forall x,\ \log(\exp x)=x\end{cases}$ が成立する

実関数 x^x は $x>0$ でしか定義されないので

$x=e^{\log x}$ とかけて. $x^x=(e^{\log x})^x=e^{(x\log x)}$

となる。

2. 次の各問に答えよ (各 10 点/計 30 点)。

(1) 関数 e^x について、n 次までの有限マクローリン展開(即ち、$x=0$ における有限テーラー展開) を求めよ。ただし、剰余項は R_{n+1} と略記せよ。

(2) 関数 $\sqrt{1+x}$ について、3 次までの有限マクローリン展開を求めよ。ただし、剰余項は R_4 と略記せよ

(3) 関数 $(1+x)^3$ について、3 次までの有限マクローリン展開を求めよ。この場合、剰余項 R_4 は x に依存しない定数になることを示せ。また、その定数値を求めよ。

(1) $f(x)=e^x$ と書くと $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1$ (4点) $(n=0,1,2,\cdots)$ なので

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_{n+1} \text{(4点)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1} \text{ (答)}$$

$$= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1} \text{ (答)}$$

なお. $R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(|\theta|<1)$ と略さずにテーラーの剰余項が書ければ勿論更に良い。

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$ と書くと

$$f(x)=\binom{1/2}{0}+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+R_4$$

$$=\overset{(2点)}{1}+\overset{(2点)}{\frac{1}{2}}x-\overset{(2点)}{\frac{1}{8}}x^2+\overset{(2点)}{\frac{1}{16}}x^3+\overset{(2点)}{R_4} \text{ (答)}$$

但し $\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}=-\frac{1}{8}$, $\binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{16}$.

なお $R_4=\frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5=\frac{7}{256}(1+\theta x)^{-9/2}x^5$ $(|\theta|<1)$ が略さずに書いたテーラーの剰余項である。

(3) $f(x)=(1+x)^3$ と書くと. $f^{(n)}(x)=0$ $(n\geqq 4)$ なので 展開の4次以上の項はゼロである。また. 3次までの展開に対する剰余項 $R_4=\frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$ $(|\theta|<1)$ は

$R_4=\frac{0}{4!}x^4=0$ である。(答)

$$f(x)=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3+R_4$$

$$=1+3x+3x^2+x^3+R_4,\quad R_4=0 \text{ (答)}$$

3. 次の各問に答えよ(各10点/計40点)。

(1) $z = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を計算せよ。

(2) $z = \sin(x^2y)$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を計算せよ。

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく。$\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial \theta}, \dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ を計算せよ。

(4) $z = f(x, y)$ が全微分可能、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ のとき、(3)の結果を用いて $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ をそれぞれ $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の一次式として表せ。さらに、$\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ であることを多項式計算により示せ。

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y^5 - 2x^3y^2 + y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}x^2\right)y^5 - 2\left(\dfrac{\partial}{\partial x}x^3\right)y^2 + \overset{0}{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}1\right)}\cdot y = 2xy^5 - 6x^2y^2$ (答)

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y^5 - 2x^3y^2 + y) = x^2\left(\dfrac{\partial}{\partial y}y^5\right) - 2x^3\left(\dfrac{\partial}{\partial y}y^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}y = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$ (答)

これを $2x$ とした誤りが多かった。

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x^2y) = \left(\dfrac{d}{dt}\sin t\right)\dfrac{\partial t}{\partial x} = \cos t \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}x^2y = \cos(x^2y)\cdot 2xy = 2xy\cos(x^2y)$ (答)

$t = x^2y$ とおき、合成関数の微分公式を適用している。

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x^2y) = \left(\dfrac{d}{dt}\sin t\right)\dfrac{\partial t}{\partial y} = \cos t \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}x^2y = \cos(x^2y)\cdot x^2 = x^2\cos(x^2y)$ (答)

これを1とした誤りが多かった。

(3) $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}r\right)\cos\theta = 1\cdot\cos\theta = \cos\theta$ (答) --- 2点

$\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) = r\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta\right) = r\cdot(-\sin\theta) = -r\sin\theta$ (答) --- 3点

$\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}r\right)\sin\theta = 1\cdot\sin\theta = \sin\theta$ (答) --- 2点

$\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) = r\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\right) = r\cdot\cos\theta = r\cos\theta$ (答) --- 3点

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$ (答) --- 3点

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$ (答) --- 3点

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$ (証明終り) --- 4点