微分積分 I (b)　中間試験　問題・答案用紙　（全２枚中の第１枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 １年生対象, 担当教員 田嶋,　2010 年 6 月 25 日 1 限実施

[注意] 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

$\boxed{1}$ 小問 1), 2) に示した式の値を求めよ。(10+10=20 点)

1) $\tan\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$　　2) $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{5}+\arccos\dfrac{4}{5}\right)$

$\boxed{2}$ 小問 1)〜10) に示した関数 $f(x)$ の１次 (階) 導関数を求めよ。解答はこの用紙の裏面に書け。(4 点× 10 問=40 点)

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}\quad(x>3)$　2) $f(x)=\log\frac{2x+3}{5x+7}\quad(x>-\frac{7}{5})$　3) $f(x)=\log(\log x)\quad(x>0)$

4) $f(x)=\sin\bigl(\sin(\sin x)\bigr)$　5) $f(x)=2^x$　6) $f(x)=x^x\quad(x>0)$　7) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}\quad(0<x<\pi)$

8) $f(x)=\arcsin\frac{x}{2}\quad(-2<x<2)$　9) $f(x)=\arccos\sqrt{2-x^2}\quad(1<x<\sqrt{2})$　10) $f(x)=\arctan(\cos x)$

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 22 年 6 月 25 日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号	氏 名	(第 1 枚目) 得 点　/60

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　2010 年 6 月 25 日 1 限実施

$\boxed{3}$ 小問 1), 2) に示した 極限値を求めよ。(10+10=20 点)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos\,x-1}$　　2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\bigl(1+2\sin\,x\bigr)^{1/x}$

$\boxed{4}$ n を負でない整数とするとき、関数 $f(x)=x^2\sin 3x$ の n 次（階）導関数を下式の形に表せ。

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}=3^n\left\{\left(\boxed{\text{ア}}\right)\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)+\left(\boxed{\text{イ}}\right)\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

ただし、$\boxed{\text{ア}}$と$\boxed{\text{イ}}$ は x の多項式とする。(10 点)

$\boxed{5}$ $z=z(y)$, $y=y(x)$ であり、$z(y)$ と $y(x)$ は 2 回微分可能であるとする。このとき、$\dfrac{d^2z\bigl(y(x)\bigr)}{dx^2}$ を、$\dfrac{dz}{dy}$, $\dfrac{d^2z}{dy^2}$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を用いて表せ。解答はこの用紙の裏面に書け。(10 点)

科目名: 微分積分 I (中間試験)	試験日: 平成 22 年 6 月 25 日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号								氏 名	(第 2 枚目) 得 点　/40

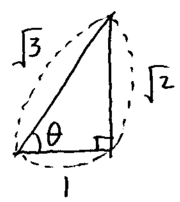
2010年6月25日実施　微分積分I(b)　中間試験　解答・解説

$\boxed{1}$　1)　$\theta = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ とおくと．$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$．

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ では $\cos\theta \geqq 0$ なので．$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$．

∴ (与式) $= \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/3}} = \sqrt{2}$ (答)

$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ としたら -2点.



2)　$\alpha = \arcsin\frac{1}{5}$ とおくと．$\sin\alpha = \frac{1}{5}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$．

$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ では $\cos\alpha \geqq 0$ なので．$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$．

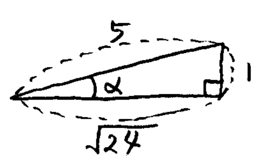
±1をつけたら -2点.

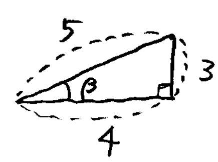
$\beta = \arccos\frac{4}{5}$ とおくと．$\cos\beta = \frac{4}{5}$ かつ $0 \leqq \beta \leqq \pi$．

$0 \leqq \beta \leqq \pi$ では $\sin\beta \geqq 0$ なので．$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$．

∴ (与式) $= \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{25}(2+3\sqrt{6})$ (答)





$\boxed{2}$ 1) $f' = f\cdot(\ln|f|)'$ ($\because$ 対数微分法)

$$= f\cdot\frac{1}{2}\cdot\{\log|x| + \log|x-1| - \log|x-2| - \log|x-3|\}'$$

$$= \frac{f}{2}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right) \text{ (答)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}\;\frac{-4x^2+12x-6}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= -\frac{2x^2-6x+3}{\sqrt{x(x-1)(x-2)^3(x-3)^3}} \text{ (答)}$$

2) $f' = \{\log|2x+3| - \log|5x+7|\}'$

$$= \frac{d\log|u|}{du}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{d\log|v|}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \quad (u = 2x+3,\ v = 5x+7)$$

$$= \frac{1}{u}\cdot 2 - \frac{1}{v}\cdot 5 = \frac{2}{2x+3} - \frac{5}{5x+7} = \frac{-1}{(2x+3)(5x+7)} \text{ (答)}$$

3) $f = \log(\log x) = \log t$, ($t = \log x$ とおく).

$$f' = \left(\frac{d}{dt}\log t\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\log x\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x} \text{ (答)}$$

4) $v = \sin x$, $u = \sin v$ とおくと $f = \sin u$.

$$f' = \left(\frac{d}{du}\sin u\right)\cdot\left(\frac{d}{dv}\sin v\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)$$

$$= \cos u \cdot \cos v \cdot \cos x$$

$$= \cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x \text{ (答)}$$

5) $f' \underset{\text{対数微分法}}{=} f\cdot(\log f)' = 2^x\,(x\log 2)' = 2^x\log 2$ (答)

または

$$f' = \{(e^{\log 2})^x\}' = (e^{x\log 2})' = e^{x\log 2}\cdot(x\log 2)' = e^{x\log 2}\log 2 = 2^x\log 2$$

$\boxed{2}$ 6) $f' = f \cdot (\log f)' = x^x (x \log x)' = x^x (\log x + x \cdot \frac{1}{x})$

↑対数微分法

$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x^x (\log x + 1)}$ (答)

7) $f' = f \cdot (\log f)' = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \ \log \sin x)'$

$= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ \log \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$

$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - (\sin x) \log(\sin x) \right)}$ (答)

$= (\sin x)^{\cos x - 1} \cos^2 x - (\sin x)^{\cos x + 1} \log (\sin x)$ (答)

8) $t = \frac{x}{2}$ とおくと. $f = \arcsin t$.

$\therefore \ f' = \left(\frac{d}{dt} \arcsin t \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$

$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$ (答)

9) $t = \sqrt{2-x^2}$ とおくと $f = \arccos t$.

$\therefore \ f' = \left(\frac{d}{dt} \arccos t \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} \sqrt{2-x^2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$

$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)(2-x^2)}}}$ (答)

10). $t = \cos x$ とおくと. $f = \arctan t$.

$\therefore \ f' = \left(\frac{d}{dt} \arctan t \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} \cos x \right)$

$= \frac{1}{1+t^2} \cdot (-\sin x)$

$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}}$ (答)

3 1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(-\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-\cos x}=\frac{2}{-1}=-2 \quad (答)$$

2)
$$\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\exp\log\{(1+2\sin x)^{1/x}\}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2\sin x)}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=}\exp\lim_{x\to 0}\frac{\{\log(1+2\sin x)\}'}{(x)'}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x}{1+2\sin x}}{1}=\exp\frac{\frac{2\cdot 1}{1+2\cdot 0}}{1}=e^2 \quad (答)$$

4
$$f^{(n)}=\binom{n}{0}x^2\cdot(\sin 3x)^{(n)}+\binom{n}{1}\cdot 2x\cdot(\sin 3x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}\cdot 2\cdot(\sin 3x)^{(n-2)}$$

$$=x^2\cdot 3^n\cdot\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)+n\cdot 2x\cdot 3^{n-1}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 3^{n-2}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi-\pi\right)$$

$$=3^n x^2\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)+3^n\cdot\frac{2n}{3}x\left\{-\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$
$$+3^n\frac{n(n-1)}{9}\left\{-\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=3^n\cdot\left\{\underbrace{\left(x^2-\frac{n(n-1)}{9}\right)}_{ア}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)-\underbrace{\frac{2n}{3}x}_{\substack{\shortparallel\\ イ}}\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)\right\} \quad (答)$$

上記の導出で　$n\geqq 0$ のとき　$\frac{d^n}{dx^n}\sin 3x=3^n\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)$　が成立することを利用した。

$$\because\ \frac{d^n}{dx^n}\sin 3x=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d}{dx}\sin 3x\right)=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(3\cos 3x)=3\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{d}{dx}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}3\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=3^2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)$$

$$=3^2\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{d}{dx}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\right)=3^2\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}3\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=3^3\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=3^n\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

n次導関数は求めずに、1次、2次、3次導関数を求めた場合は、夫々の次数が完全に正しい場合に1点ずつを与えた。4次以上は点を与えなかった。

$\boxed{5}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$$

$$= \left\{\left(\frac{d}{dy}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \underline{\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (答)$$