平成 21 年度 微分積分 I(7 月 31 日 (金))

[担当：堀邊、古関、田嶋、保倉]

学　　科(該当学科名を○で囲むこと)	学　籍　番　号	氏　　　　名	採　　点
電 気·電 子 工 学 科 情報メディア工学科 物 理 工 学 科 知能システム工学科			/30

この解答用紙 1 枚には 1 問しか解答できません。表だけで足りないときは、その旨を明記し、裏を使用してください。

$\boxed{1}$ 次の関数の $x=0$ での 3 次までのテーラー展開を求めよ。ただし、剰余項は R_4 と表示し、具体的な形を求める必要はない。

(1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2) $\sqrt{1+x}$　　(3) $x\cos x$

学　　科（該当学科名を○で囲むこと）	学　籍　番　号	氏　　　　　名	採　　点
電気·電子 工学科 情報メディア工学科 物 理 工 学 科 知能システム工学科			/20

この解答用紙 1 枚には 1 問しか解答できません。表だけで足りないときは、その旨を明記し、裏を使用してください。

$\boxed{2}$ 関数 $g(x)$

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

とするとき、次の**問い**に答えよ。

問い 1 関数 $g(x)$ の 1 次 (階) 導関数 $g'(x)$ を求めよ。

問い 2 関数 $h(x)$ を $h(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ を求めよ。

問い 3 1 階導関数 $g'(x)$ の $x \to 0$ の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x)$ を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = e$ であることを用いてもよい。

学　　科（該当学科名を○で囲むこと）	学　籍　番　号	氏　　　　名	採　　点
電気･電子工学科 情報メディア工学科 物理工学科 知能システム工学科			/30

この解答用紙 1 枚には 1 問しか解答できません。表だけで足りないときは、その旨を明記し、裏を使用してください。

$\boxed{3}$ 次の関数 $f(x,y)$ について、$f_x(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 、$f_y(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^2y + y^3$　　(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

(3) において、a、b は定数。

学　　科（該当学科名を○で囲むこと）	学　籍　番　号	氏　　　　名	採　　点
電気･電子 工学科 情報メディア工学科 物 理 工 学 科 知能システム工学科			/20

この解答用紙 1 枚には 1 問しか解答できません。表だけで足りないときは、その旨を明記し、裏を使用してください。

4 $x = \dfrac{1}{2}(e^{u+v} + e^{u-v})$、$y = \dfrac{1}{2}(e^{u+v} - e^{u-v})$ とおく。2 次 (階) 偏導関数が存在して連続である関数 $z = f(x, y)$ に対し、次の**問い**に答えよ。

問い 1 $x_u \left(= \dfrac{\partial x}{\partial u}\right)$、$x_v \left(= \dfrac{\partial x}{\partial v}\right)$、$y_u \left(= \dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$ 及び $y_v \left(= \dfrac{\partial y}{\partial v}\right)$ を x、y を用いて表わせ。

問い 2 $z_u \left(= \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$ 及び $z_v \left(= \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$ を $z_x \left(= \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$、$z_y \left(= \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ 及び x、y を用いて表せ。

問い 3 $z_{uu} \left(= \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$ 及び $z_{vv} \left(= \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$ を $z_{xx} \left(= \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$、$z_{yy} \left(= \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$、$z_{xy} \left(= \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$、$z_x$、$z_y$、$x$、$y$ を用いて表せ。

問い 4

$$z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u} \left(z_{uu} - z_{vv}\right)$$

となることを示せ。

$\boxed{1}$ 次の関数の $x = 0$ での 3 次までのテーラー展開を求めよ．ただし，剰余項は R_4 と表示し，具体的な形を求める必要はない．

(1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 10点 (2) $\sqrt{1+x}$ 10点 (3) $x\cos x$ 10点

(1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}x^3 + R_4$

(2) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4$

(3) $x\cos x = (0 +) 1\cdot x (+ 0\cdot x^2) - \frac{1}{2}x^3 + R_4$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　名	得点
微分積分 I(期末)	H21 7/31	堀邊・古関			/30

$\boxed{2}$ 関数 $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ について，次の問いに答えよ．

問い1 1次導関数 $g'(x)$ を求めよ． 7点

問い2 $h(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ を求めよ． 7点

問い3 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = e$ であることを用いてもよい． 6点

問1. $g' = g\cdot(\log g)' = (1+x)^{1/x}\left\{\frac{1}{x}\log(1+x)\right\}'$

$$= (1+x)^{1/x}\left\{-\frac{1}{x^2}\log(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right\}$$

$$= (1+x)^{1/x}\left\{\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2}\log(1+x)\right\}$$

問2. $h = \dfrac{g'}{g} = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{1}{x^2}\log(1+x)$

$$= \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}^{\to 0}$$

$$\overset{(ロピタル)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1-1} - \log(1+x)}{2x+3x^2}$$

$$\overset{(ロピタル)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

問3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} h(x)g(x) = \left(\lim_{x\to 0} h(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e = -\frac{e}{2}$$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分I(期末)	H21 7/31	堀邊・古関			/20

$\boxed{3}$ 次の関数 $f(x,y)$ について，1次の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^2y+y^3$ (2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ (3) $f(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

5点＋5点 5点 ＋ 5点 5点 ＋5点.

ただし，(3) において，a, b は定数．

(1) $f_x = 2xy$

$f_y = x^2+3y^2$

(2) $$f_x = \frac{y(x^2+y^2)^2 - xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_y = \frac{x(x^2+y^2)^2 - xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

(3) $$f_x = \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$f_y = \frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏 名	得 点
微分積分I(期末)	H21 7/31	堀邊・古閑			/30

[4]

$$x = \frac{1}{2}(e^{u+v} + e^{u-v}), \quad y = \frac{1}{2}(e^{u+v} - e^{u-v})$$

とおく．2次の偏導関数が存在して連続である関数 $z = f(x, y)$ に対し，次の**問い**に答えよ．

問い1 x_u, x_v, y_u, y_v を x, y を用いて表せ． 2点+2点+2点+2点 = 8点

問い2 z_u, z_v を z_x, z_y, x, y を用いて表せ． 2点+2点 = 4点

問い3 z_{uu}, z_{vv} を $z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_x, z_y, x, y$ を用いて表せ． 3点+3点 = 6点．

問い4

$$z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$$

となることを示せ． 2点

問1. $x_u = \frac{1}{2}e^{u+v} + \frac{1}{2}e^{u-v} = x$

$x_v = \frac{1}{2}e^{u+v} - \frac{1}{2}e^{u-v} = y$

$y_u = \frac{1}{2}e^{u+v} - \frac{1}{2}e^{u-v} = y$

$y_v = \frac{1}{2}e^{u+v} + \frac{1}{2}e^{u-v} = x$

問2. $z_u = z_x x_u + z_y y_u = x z_x + y z_y$

$z_v = z_x x_v + z_y y_v = y z_x + x z_y$

問3. $z_{uu} = x_u z_x + x z_{xu} + y_u z_y + y z_{yu}$ 　　$z_{xy} = z_{yx}$ (連続)

$= x z_x + x(x z_{xx} + y z_{xy}) + y z_y + y(x z_{yx} + y z_{yy})$

$= x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y$

$z_{vv} = y_v z_x + y z_{xv} + x_v z_y + x z_{yv}$

$= x z_x + y(y z_{xx} + x z_{xy}) + y z_y + x(y z_{yx} + x z_{yy})$

$= y^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + x^2 z_{yy} + x z_x + y z_y$

問4. $z_{uu} - z_{vv} = (x^2 - y^2) z_{xx} + (y^2 - x^2) z_{yy}$

$= (x^2 - y^2)(z_{xx} - z_{yy})$

$= (x+y)(x-y)(z_{xx} - z_{yy})$

$= e^{u+v} e^{u-v}(z_{xx} - z_{yy}) = e^{2u}(z_{xx} - z_{yy})$

$\therefore z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分I(期末)	H21 7/31	堀邊・古関			/20