福井大学工学部 情報メディア・知能システム 工学科 1年生対象、担当教員 田嶋、2009年6月19日1限実施

微分積分 I(c1) 中間試験問題用紙

各人に A4 版問題用紙1枚、B4 版答案用紙1枚 (表裏使用)、B4 版計算用紙1枚を配布する。答案用紙1枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。問【1】を除き、解答用紙には最終的な答だけでなく導出過程も記せ。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

【1】 小問 1) 〜 10) に与えた関数 $f(x)$ の1次導関数 $f'(x)$ を求めよ。なお、この問に限っては、解答用紙には計算過程を記さず、最終的な答である数式のみを記せ。

1) $f(x) = \sqrt{x^5} \quad (x > 0)$
2) $f(x) = \cos\dfrac{x}{5}$
3) $f(x) = e^{5x}$
4) $f(x) = 5^x$
5) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$
6) $f(x) = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$
7) $f(x) = \arctan x$
8) $f(x) = (2x)^{2x} \quad (x > 0)$
9) $f(x) = \arcsin(x^2) \quad (-1 < x < 1)$
10) $f(x) = \arctan\sqrt{1-3x} \quad (x < \dfrac{1}{3})$

【2】 小問 1)〜3) に示した式の値を求めよ。

1) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
2) $\tan\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$
3) $\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{3} + \arcsin\dfrac{3}{4}\right)$

【3】 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin^2 x}$ を求めよ。

【4】 $f(x) = x^{x^x}$ (即ち、x の「x の x 乗」乗) の1次導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、$x > 0$ とする。

【5】 $f(x) = \left(x^3 + 1\right)e^{-x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし、n はゼロ以上の整数とする。計算結果は、「$(-1)^n e^{-x}\cdot(x$ の3次式 $)$」の形に整理して示せ。

【6】 「$(e^x)' = e^x$ であること」および「逆関数の微分公式」を使って、$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を導け。

微分積分 I (c1) 中間試験 答案用紙

福井大学工学部情報・知能工学科 1 年生対象講義 微分積分 I(c1) (担当教員 田嶋) 2009 年 6 月 19 日 1 限実施 中間試験答案用紙

【1】40 点=4 点× 10 問

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

9)

10)

【2】20 点=5+5+10

1)

2)

3)

【3】10 点

【4】(10 点), 【5】(10 点), 【6】(10 点) は裏面に解答せよ

学科		学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	合計

(2009年6月19日実施) 微分積分I (c1) 中間試験 解答・解説

[1]

1) $f' = (x^{5/2})' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ (公式 $(x^a)' = a x^{a-1}$ を利用)

2) $f = \cos\frac{x}{5} = \cos t$ ($t = \frac{x}{5}$ とおいた)。合成関数の微分公式により、

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{5}\right) = (-\sin t)\cdot\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$$

3) $f = e^{5x} = e^t$ ($t = 5x$ とおく)。合成関数の微分公式により

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\left(\frac{d}{dx}5x\right) = (e^t)\cdot 5 = 5e^{5x}$$

4) $5 = e^{\log 5}$ なので $f = 5^x = (e^{\log 5})^x = e^{x\log 5} = e^t$ ($t = x\log 5$)。

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\left(\frac{d}{dx}x\log 5\right) = e^t\log 5 = 5^x\log 5.$$

5) $x = e^{\log x}$ $(x>0)$ なので $f = x^x = (e^{\log x})^x = e^{x\log x} = e^t$ ($t = x\log x$)。

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\left(\frac{d}{dx}x\log x\right) = e^t\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1).$$

6) $y = \arcsin x$ とおくと $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. $\cos y \geq 0$ である。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\sin y = \cos y.\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7) $y = \arctan x$ とおくと $x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan y = \frac{d}{dy}\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{(\sin y)'\cos y - \sin y(\cos y)'}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 y}.\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

8) $f = (2x)^{2x} = t^t$ ($t = 2x$ とおいた)。5) の結果を利用して、

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}t^t\right)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = t^t(\log t + 1)\cdot 2 = 2(2x)^{2x}(\log 2x + 1)$$

9) $f = \arcsin(x^2) = \arcsin t$, $t = x^2$. 6) の結果を利用して、

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\arcsin t\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

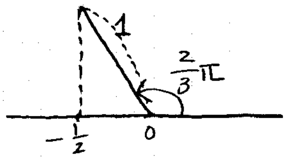
10) $f = \arctan\sqrt{1-3x} = \arctan t$, $t = u^{1/2}$, $u = 1-3x$. 7) の結果を使い、

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\arctan t\right)\left(\frac{d}{du}u^{1/2}\right)\left\{\frac{d}{dx}(1-3x)\right\}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}u^{-1/2}\cdot(-3) = -\frac{3}{2}\frac{1}{1+(1-3x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{3}{2(2-3x)\sqrt{1-3x}}$$

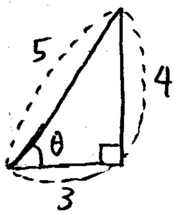
[2]

1) $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ である。また，arccos の値域は $[0, \pi]$ であるから $0 \leqq \theta \leqq \pi$ である。したがって $\theta = \frac{2}{3}\pi$ である。



2) $\theta = \arcsin\frac{4}{5}$ とおくと，$\sin\theta = \frac{4}{5}$ であり，また arcsin の値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ であるから $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ である。したがって $\cos\theta \geqq 0$ であるので，

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \quad \therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$



3) $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$ とおくと，

$\sin\alpha = \frac{2}{3}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ である。

$$\therefore \cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\beta = \arcsin\frac{3}{4}$ とおくと，

$\sin\beta = \frac{3}{4}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ である。

$$\therefore \cos\beta = +\sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$(与式) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$$

[3]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos 2x - \cos 3x}^{1-1=0}}{\underbrace{\sin^2 x}_{\to 0}} \underset{\uparrow\ \text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{-2\sin 2x + 3\sin 3x}^{\to 0}}{\underbrace{2\sin x\cos x}_{\to 0}}$$

$$\overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x + 9\cos 3x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{-4\cdot 1 + 9\cdot 1}{2\cdot 1 - 2\cdot 0} = \frac{5}{2}$$

（別解法） $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ を利用すると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$$

となる。この形の方が計算は容易であろう。

同様の式変形で

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x + 3\sin 3x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x + 3\sin 3x}{2\sin x}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}^{1\ \shortparallel}$$

とするのも正しい式変形である。なお，後で学ぶテーラー展開を利用するのが最も楽に計算する方法である。

[4] 対数微分法を利用すると

$$f' = f(\log f)' = x^{x^x}(\log x^{x^x})' = x^{x^x}(x^x \log x)'$$

$$= x^{x^x}\{(x^x)' \log x + x^x (\log x)'\}.$$

$(x^x)' = x^x(\log x + 1)$ であるから (∵[1]の5)の結果)

$$f' = x^{x^x}\{x^x(\log x+1)\log x + x^x \frac{1}{x}\}$$

$$= \underbrace{x^{x^x} x^x}_{x^{x^x+x}\text{とも書き表せる。}} \{(\log x)(\log x + 1) + \frac{1}{x}\}$$

[5] ライプニッツの公式を利用すると

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^3+1)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)}$$

$\binom{n}{0} = 1$, $(x^3+1)^{(0)} = x^3+1$, $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$

$\binom{n}{1} = n$, $(x^3+1)^{(1)} = 3x^2$, $(e^{-x})^{(n-1)} = (-1)^{n-1} e^{-x} = -(-1)^n e^{-x}$

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $(x^3+1)^{(2)} = 6x$, $(e^{-x})^{(n-2)} = (-1)^{n-2} e^{-x} = (-1)^n e^{-x}$

$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $(x^3+1)^{(3)} = 6$, $(e^{-x})^{(n-3)} = (-1)^{n-3} e^{-x} = -(-1)^n e^{-x}$

$k \geq 4$ のとき $(x^3+1)^{(k)} = 0$.

$$\therefore f^{(n)}(x) = 1 \cdot (x^3+1) \cdot (-1)^n e^{-x} + n \cdot 3x^2 \cdot (-1) \cdot (-1)^n e^{-x}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6x \cdot (-1)^n e^{-x} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 6 \cdot (-1) \cdot (-1)^n e^{-x}$$

$$= (-1)^n e^{-x} \{x^3 - 3nx^2 + 3n(n-1)x - n(n-1)(n-2) + 1\}$$

[6] $y = \log x$ とおくと、$x = e^y$. $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} e^y = e^y$.

$$\therefore (\log x)' = \frac{d}{dx} \log x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

よって $(\log x)' = \frac{1}{x}$ が示された。