微分積分 I　定期試験　問題・答案用紙　（全3枚中の第1枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・堀邊・古閑,　2008 年 8 月 1 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問に示した関数 $f(x)$ の1次導関数（1階導関数）を求めよ。(40 点)

(1) $f(x) = \sin(2x+1)$　(5 点)

(2) $f(x) = 3^x$　(5 点)

(3) $f(x) = \cos(\cos x)$　(5 点)

(4) $f(x) = \tan x$　(5 点)

(5) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{1+x^2}$　$\left(= \arctan\frac{1}{1+x^2}\right)$　(10 点)

(6) $f(x) = (x^4+1)^x$　(ヒント：対数微分法)　(10 点)

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 20 年 8 月 1 日	出題者: 田嶋・保倉 堀邊・古閑	学 科	学籍番号	氏 名	(第 1 枚目) 得 点　/40

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = (1+x)e^{2x}$ について以下の小問に答えよ。(35 点)

(1) $f'(x)$ を求めよ。　(5 点)

(2) $f''(x)$ を求めよ。　(5 点)

(3) $f'''(x)$ を求めよ。　(5 点)

(4) $f(x)$ の n 次導関数（n 階導関数） $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし n はゼロ以上の整数である。　(10 点)

(5) $f(x)$ の $x=0$ でのテーラー展開を x の 3 次の項まで求めよ。ただし, 剰余項は R_4 等と略記してよい。
なお, 小問 (4) の答が分からなくても本小問を解くのに支障は生じない。　(10 点)

科目名: 微分積分 I (定期試験)	試験日: 平成 20 年 8 月 1 日	出題者: 田嶋・保倉 堀邊・古閑	学 科	学籍番号	氏 名	(第 2 枚目) 得 点　/35

$\boxed{3}$ 極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x^5+11)}{\log(3x^7+13)}$　を求めよ。　(10 点)

$\boxed{4}$ $x = u\sin v$, $y = u\cos v$ のとき, 以下の小問に答えよ。　(15 点)

(1) x_u, x_v, y_u, y_v を求めよ。 (記号の説明：$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, $y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$)　(8 点)

(2) $z = f(x, y)$ を全微分可能な関数とするとき, z_x, z_y を u, v, z_u, z_v を用いて表せ。ただし, $u \neq 0$ とする。
(記号の説明：$z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $z_u = \frac{\partial f(u\sin v, u\cos v)}{\partial u}$, $z_v = \frac{\partial f(u\sin v, u\cos v)}{\partial v}$)　(7 点)

2008年度前期 微分積分I 定期試験　解答・解説
（2008年8月1日1限実施分）

$\boxed{1}$ (1) $f' = \{\sin(2x+1)\}' = \dfrac{d\sin t}{dt} \cdot \dfrac{d(2x+1)}{dx}$ （$t=2x+1$ とおいて合成関数の微分則を適用した）

$= \cos t \cdot 2 = \underline{2\cos(2x+1)}$

(2) $f' = (3^x)' = \{(e^{\log 3})^x\}' = (e^{x\log 3})' = \dfrac{de^t}{dt} \cdot \dfrac{d(x\log 3)}{dx}$ （$t = x\log 3$ とする）

$= e^t \log 3 = e^{x\log 3}\log 3 = \underline{3^x \log 3}$

あるいは、対数微分法により、$f' = f(\log f)' = 3^x (x\log 3)' = \underline{3^x \log 3}$

(3) $f' = \{\cos(\cos x)\}' = \dfrac{d\cos t}{dt} \cdot \dfrac{d\cos x}{dx}$ （$t = \cos x$ とおいた）

$= (-\sin t)\cdot(-\sin x) = \underline{\sin(\cos x)\cdot\sin x}$

(4) $f' = (\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' \underset{\text{商の微分公式}}{=} \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$

(5) $f' = \left(\arctan \dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{d\arctan t}{dt} \cdot \dfrac{d\frac{1}{1+x^2}}{dx}$ （$t = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする）

ここで、$\dfrac{d\arctan t}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ ← （公式として覚えておくことをすすめます。後期 微積IIで積分公式として使います。）

また、$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\dfrac{d}{du}\dfrac{1}{u}\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(1+x^2)$ （$u = 1+x^2$ とおく）

$= -\dfrac{1}{u^2}\cdot 2x = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \cdot \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2+1} = \underline{\dfrac{-2x}{x^4+2x^2+2}}$

(6) $f' = \{(x^4+1)^x\}' = f(\log f)' = (x^4+1)^x\{x\log(x^4+1)\}'$

$= (x^4+1)^x\{x'\log(x^4+1) + x(\log(x^4+1))'\}$.

ここで $x' = 1$, $\{\log(x^4+1)\}' = \dfrac{1}{x^4+1}\cdot(x^4+1)' = \dfrac{4x^3}{x^4+1}$ なので

$\therefore f' = \underline{(x^4+1)^x\left\{\log(x^4+1) + \dfrac{4x^4}{x^4+1}\right\}}$

$\boxed{2}$ (1) $f' = \{(1+x)e^{2x}\}' = (1+x)'e^{2x} + (1+x)(e^{2x})' = 1\cdot e^{2x} + (1+x)2e^{2x}$

$= \underline{(3+2x)e^{2x}}$

(2) $f'' = \{(3+2x)e^{2x}\}' = (3+2x)'e^{2x} + (3+2x)(e^{2x})'$

$= 2e^{2x} + (3+2x)\cdot 2e^{2x} = \underline{(8+4x)e^{2x}} = \underline{4(2+x)e^{2x}}$

(3) $f''' = \{4(2+x)e^{2x}\}' = 4(2+x)'e^{2x} + 4(2+x)(e^{2x})'$

$= 4e^{2x} + 4(2+x)2e^{2x} = \underline{(20+8x)e^{2x}} = \underline{4(5+2x)e^{2x}}$

(4) ライプニッツの公式により

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^{(k)} (e^{2x})^{(n-k)}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{\parallel \atop 1} (1+x)\, 2^n e^{2x} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\parallel \atop n} \cdot 1 \cdot 2^{n-1} e^{2x}$$

$$\underline{2^{n-1} e^{2x} (n+2+2x)}$$

$n=0$でfに、$n=1,2,3$で小問(1),(2),(3)の結果に一致することを確かめるとよい。

(5) $f(0) = (1+0)\cdot e^0 = 1\cdot 1 = 1$

$f'(0) = (3+0)\cdot e^0 = 3\cdot 1 = 3$

$f''(0) = (8+0)\cdot e^0 = 8\cdot 1 = 8$

$f'''(0) = (20+0)\cdot e^0 = 20\cdot 1 = 20$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + R_4$$

$$= \underline{1 + 3x + 4x^2 + \frac{10}{3}x^3 + R_4}$$

(別解法) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ で x を $2x$ におきかえると、

$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + O(x^4)$ を得る。

$\therefore f = (1+x)(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + O(x^4))$

$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + O(x^4)$

$\quad + x + 2x^2 + 2x^3 + \frac{4}{3}x^4 + O(x^5)$

$= \underline{1 + 3x + 4x^2 + \frac{10}{3}x^3 + O(x^4)}$

$\boxed{3}$ (与式) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\overset{分子\to\infty}{\log(2x^5+11)}}{\underset{分母\to\infty}{\log(3x^7+13)}} \underset{\substack{\uparrow \\ ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\{\log(2x^5+11)\}'}{\{\log(3x^7+13)\}'}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{10x^4}{2x^5+11}}{\dfrac{21x^6}{3x^7+13}} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x^4(3x^7+13)}{21x^6(2x^5+11)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10\cdot(3+13\cdot x^{-1})}{21\cdot(2+11\cdot x^{-1})} = \frac{10\cdot 3}{21\cdot 2} = \underline{\frac{5}{7}}$$

$\boxed{4}$ (1) $x_u = \dfrac{\partial}{\partial u}(u\sin v) = \underline{\sin v}$

$x_v = \dfrac{\partial}{\partial v}(u\sin v) = \underline{u\cos v}$

$y_u = \dfrac{\partial}{\partial u}(u\cos v) = \underline{\cos v}$

$y_v = \dfrac{\partial}{\partial v}(u\cos v) = \underline{-u\sin v}$

(2) $\begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_u y_v - x_v y_u} \begin{pmatrix} y_v & -y_u \\ -x_v & x_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-u\sin^2 v - u\cos^2 v} \begin{pmatrix} -u\sin v, & -\cos v \\ -u\cos v, & \sin v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin v, & \dfrac{\cos v}{u} \\ \cos v, & -\dfrac{\sin v}{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} z_x &= z_u \sin v + z_v \frac{\cos v}{u} \\ z_y &= z_u \cos v - z_v \frac{\sin v}{u} \end{aligned}\right\} \text{(答)}$$