福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1年生対象、担当教員 田嶋、2008 年 6 月 20 日 1 限実施

微分積分 I(a) 中間試験問題用紙

各人に A4 版問題用紙１枚、B4 版答案用紙１枚 (表裏使用)、B4 版計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。【１】番を除き、解答には最終的な答だけでなく導出過程も記せ。

なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。また、$f(x)$ の n 次の導関数 (n 階の導関数とも言う) を表すのに、$f^{(n)}(x)$ という記法を用いてよい。

【1】 小問 1) ～ 6) に与えた関数 $f(x)$ について、その１次導関数 $f'(x)$ を記せ。解答用紙の解答欄に最終的な答のみを記せ。[5 点× 6 問=30 点]

1) $f(x) = \left(5-4x\right)^3$　　2) $f(x) = \log\left(2x^3+4\right)$　　3) $f(x) = \tan x$

4) $f(x) = \arcsin x$　　5) $f(x) = \arctan\left(x^2\right)$　　6) $f(x) = x^{\sin x}$

【2】 小問 1), 2) に与えた式の値を求めよ。[10 点× 2 問=20 点]

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \arccos\dfrac{4}{5}\right)$　　2) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$

【3】 下記の極限値を求めよ。[10 点]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - 1}{x\sin x}$$

【4】 小問 1)～3) に与えた関数の n 次導関数を求めよ。ただし、n はゼロ以上の整数とする。[7+7+6=20 点]

1) e^{3x}　　2) $\dfrac{1}{x^2}$　　3) $\dfrac{e^{3x}}{x^2}$

【5】 三角関数 sec は、三角関数 cos の逆数として、下式で定義される。

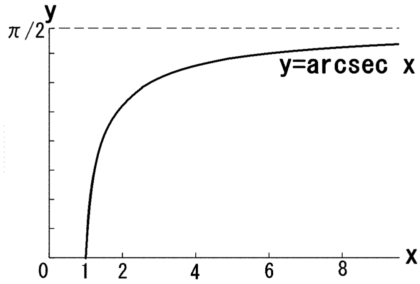
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \text{ただし}\theta \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\ \text{とする。}$$

また、逆三角関数 arcsec は、三角関数 sec の逆関数として、

本試験においては下記のように定義することにする。

$$x = \sec y,\quad 0 \leq y < \frac{\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \mathrm{arcsec}\, x,\quad x \geq 1$$

（なお、参考のため右にこの関数のグラフを示す。）



このとき、$\mathrm{arcsec}\, x$ の 1 次導関数 $(\mathrm{arcsec}\, x)'$ を求めよ。

ただし $x \geq 1$ である。[20 点]

微分積分 I (a) 中間試験 答案用紙

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象、担当教員 田嶋、　2008 年 6 月 20 日 1 限実施

【1】30 点=5 × 6

1)

2)

3)

4)

5)

6)

【2】20 点=10+10

【3】10 点

【4】(20 点=7+7+6) と 【5】(20 点) は裏面に解答せよ

学科		学籍番号		氏名		得点	[1] [2] [3] [4] [5]

2008年度前期 微分積分I(a)中間試験 解答・解説
(2008/6/20実施分)

(担当教員 田嶋)

[1]

1) $f(x)=(5-4x)^3=t^3$ ($t=5-4x$ とおく)

$$\frac{df}{dx}=\frac{dt^3}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=3t^2\cdot(-4)=-12(5-4x)^2 \quad (答)$$

2) $f(x)=\log(2x^3+4)=\log t$ ($t=2x^3+4$ とおく)

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{d}{dt}\log t\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\cdot 6x^2=\frac{6x^2}{2x^3+4}=\frac{3x^2}{x^3+2} \quad (答)$$

3) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. 関数の商の微分公式を使うと

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ なので、$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ (答) 注 $1+\tan^2 x$ も正解.

4) $y=\arcsin x$ とおくと、$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ であり、$\cos y\geqq 0$ である.

$x=\sin y$ なので $\dfrac{dx}{dy}=\cos y$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (答)$$

注 $\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$ はまちがいではないが−1点(減点)して4点とした。

5) $f(x)=\arctan(x^2)=\arctan(u)$, ($u=x^2$ とおく).

$$f'(x)=\left(\frac{d}{du}\arctan u\right)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^4} \quad (答)$$

なお、$(\arctan x)'$ は以下のようにして求める.

$y=\arctan x$ とおくと、$x=\tan y$ なので $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}$

$$=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

6) 対数微分法を利用すると

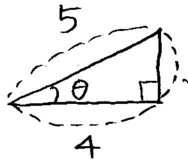
$$f'(x)=f(x)\{\log f(x)\}'=x^{\sin x}\{\log x^{\sin x}\}'$$

$$=x^{\sin x}\{\sin x\log x\}'=x^{\sin x}\{(\sin x)'\log x+\sin x(\log x)'\}$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{1}{x}\sin x\right) \quad (答)$$

(注) $f(x)$ が連続な実関数となる $x>0$ では $f(x)>0$ なので、(対数微分の公式中の)$|f(x)|$ を $f(x)$ とした。

[2] 1) $\theta = \arccos\frac{4}{5}$ とおくと $\cos\theta = \frac{4}{5}$ であり、また



$\sqrt{5^2-4^2} = 3$ なので $\sin\theta = \frac{3}{5}$ である。

$$\therefore (与式) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10} \quad (答)$$

2) $\theta = \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$ とおくと $\sin\theta = \cos\frac{\pi}{5}$, $\underset{\text{アークサインの値域}}{-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}}$

である。 $\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3}{10}\pi$ なので

$\sin\theta = \sin\frac{3}{10}\pi$ 。 $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は単調増加する

ので、この式を満たす θ の値は $\theta = \frac{3}{10}\pi$ のみである。

答 $\frac{3}{10}\pi$

注 $\frac{7}{10}\pi$ は -2点(減点)して8点とした。

[3]
$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos 3x - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x\sin x}_{\to 0}} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\overbrace{\sin 3x}^{\to 0}}{\underbrace{\sin x + x\cos x}_{\to 0}}$$

$$\underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-9\cos 3x}{\cos x + \cos x - x\sin x} \underset{x=0\text{を代入}}{=} \frac{-9}{2} = -\frac{9}{2} \quad (答)$$

[4]

1) $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, $(e^{3x})'' = 3^2 e^{3x}$, $(e^{3x})''' = 3^3 e^{3x}$, $\cdots$

したがって、 $(e^{3x})^{(n)} = 3^n e^{3x}$ (答)

2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2x^{-3}$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)'' = (-1)^2\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}$,

$\left(\frac{1}{x^2}\right)''' = (-1)^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot x^{-5}$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(4)} = (-1)^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot x^{-6}$

したがって $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n)} = (-1)^n (n+1)! \frac{1}{x^{n+2}}$ (答)

[4]

3) ライプニッツの公式を利用すると

$$\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^{3x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n-k)} \left(e^{3x}\right)^{(k)}$$ ↑2点

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{\parallel} \underbrace{(n-k+1)!}_{\parallel} \frac{1}{x^{n-k+2}}\, 3^k e^{3x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overbrace{(-1)^n(-1)^k} \overbrace{(n-k)!\,(n-k+1)} \frac{x^k}{x^{n+2}}\, 3^k e^{3x}$$

$$= (-1)^n n! \frac{e^{3x}}{x^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^k (n+1-k)}{k!} x^k \quad \text{(答)}$$ ↑6点

[5] $y = \operatorname{arcsec} x \quad \left(0 \leqq y < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x = \sec y = \dfrac{1}{\cos y} \quad (x \geqq 1)$ ↑1点

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{dx} \qquad (t = \cos y)$$

$$= -\frac{1}{t^2}(-\sin y) = \frac{\sin y}{\cos^2 y}$$ ↑5点

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin y}$$ ↑10点

$\cos y = \dfrac{1}{x}$. また $0 \leqq y < \frac{\pi}{2}$ では $\sin y \geqq 0$ なので

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

$x \geqq 1$ なので $|x| = x$.
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{(答)}$$ ↑20点

補足

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin y}$ の y を $\operatorname{arcsec} x$ で置きかえた式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(\operatorname{arcsec} x)}{\sin(\operatorname{arcsec} x)}$$

は、まちがいではないが13点とした。また

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 \sin(\operatorname{arcsec} x)}$$

は15点とした。

[別解] ($(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を既知として利用する)

$y = \operatorname{arcsec} x$,

$\sec y = x$,

$\cos y = \dfrac{1}{x}$,

$y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\arccos t\right)\frac{dt}{dx} \qquad \left(t = \frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{(答)}$$