福井大学工学部 電気電子・物理 工学科 1 年生対象、担当教員 田嶋、2007 年 6 月 29 日 1 限実施

微分積分 I(c2) 中間試験問題用紙

各人に A4 版問題用紙 1 枚、B4 版答案用紙 1 枚 (表裏使用)、B4 版計算用紙 1 枚を配布する。答案用紙 1 枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答には最終的な答だけでなく導出過程も記せ。
なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。また、$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 次の導関数を表す。

【1】 小問 1) 〜 6) に与えた関数 $f(x)$ について $f'(x)$ を求めよ。

1) $f(x) = \dfrac{1}{(3x+5)^7}$

2) $f(x) = \arcsin x$

3) $f(x) = \cos(\log x)$

4) $f(x) = \arctan(2\tan x)$

5) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

6) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

【2】 小問 1)〜3) に示した式の値を求めよ。

1) $\arcsin \dfrac{1}{2}$

2) $\cos\left(\arcsin \dfrac{1}{4}\right)$

3) $\cos\left(\arcsin \dfrac{1}{2} + \arcsin \dfrac{1}{4}\right)$

【3】 $f(x) = xe^x$ のとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし、n はゼロ以上の整数とする。

【4】 小問 1), 2) に示した極限の値を求めよ。

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

【5】 $f(x) = \sin(2x+3)$ として小問 1) 、2) に答えよ。

1) $f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$、$f''''(x)$ を求めよ。

2) $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし、n はゼロ以上の整数とする。

微分積分 I (C2) 中間試験 答案用紙

福井大学 工学部 電気電子・物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2007 年 6 月 29 日 1 限実施

【1】30 点=5 点× 6 問

1)

2)

3)

4)

5)

6)

【2】20 点=5+5+10

1)

2)

3)

【3】10 点

【4】(20 点=10+10) と 【5】(20 点=10+10) は裏面に解答せよ

学科		学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

[1] 1) $f' = \{(3x+5)^{-7}\}' = \left(\frac{d}{dt}t^{-7}\right)\left(\frac{d}{dx}t\right)$ ($t = 3x+5$ とする)

$= -7t^{-8}\cdot 3 = -\frac{21}{(3x+5)^8}$

2) $f' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (公式として覚えているなら導出は不要)

3) $f' = \{\cos(\log x)\}' = \left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\left(\frac{d}{dx}t\right)$ ($t = \log x$ とする)

$= (-\sin t)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\sin(\log x)}{x}$

4) $f' = \{\arctan(2\tan x)\}' = \left(\frac{d}{dt}\arctan t\right)\left(\frac{d}{dx}t\right)$ ($t = 2\tan x$)

$= \frac{1}{1+t^2}\cdot 2\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{(1+4\tan^2 x)\cos^2 x}$ (ここまで求まれば満点)

$= \frac{2}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \frac{2}{1+3\sin^2 x}$

5) $f' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right)\left(\frac{d}{dx}t\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{dt}{dx}$ ($t = x+\sqrt{x^2+1}$)

$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = 1 + \left(\frac{d}{du}\sqrt{u}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$ ($u = x^2+1$)

$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore f' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}\;\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}$

$f' = (x^{\sqrt{x}})' = \{\exp(\log x^{\sqrt{x}})\}' = \{\exp(\sqrt{x}\log x)\}'$

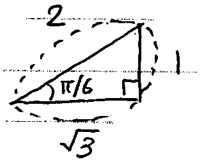
$= \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\left(\frac{d}{dx}t\right) = e^t\frac{dt}{dx}$ ($t = \sqrt{x}\log x$)

$\frac{dt}{dx} = (\sqrt{x})'\log x + \sqrt{x}(\log x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$

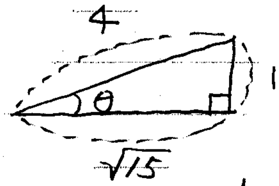
$\therefore f' = x^{\sqrt{x}}\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\frac{\log x + 2}{2}$

[2]

1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$



2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$



$\theta = \arcsin\frac{1}{4}$

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}$

[3] ライプニッツの公式を利用して、

$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x \left(e^x\right)^{(n)} + \binom{n}{1} x^{(1)} \left(e^x\right)^{(n-1)}$ ($n \geqq 0$で成立)

$= x e^x + n \cdot 1 \cdot e^x$

$= (x+n)e^x$

[4]

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$

(別解)

$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 0}{\cos x - 1}}{\underset{\to 0}{\sin^2 x}} \underset{ロピタル}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}$

$= -\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to +0} x^x = \lim_{x\to +0}\exp\left\{\log\left(x^x\right)\right\}$ ($\because$ exp と log は逆関数同士)

$= \exp\left\{\lim_{x\to +0} \underset{\to 0}{x}\,\underset{\to -\infty}{\log x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to +0}\frac{\overset{\to -\infty}{\log x}}{\underset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}}\right\}$

2)(つづき)

$$\underset{\text{ロピタル}}{=} \exp\left\{\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to+0}(-x)\right\} = e^0 = \underline{1}$$

[5]

1) $f = \sin(2x+3)$

$$f' = \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\left(\frac{d}{dx}t\right) \quad (t=2x+3)$$

$$= (\cos t)\cdot 2 = \underline{2\cos(2x+3)}$$

以下、同様に合成関数の微分法を使って

$$f'' = \frac{d}{dx}\{2\cos(2x+3)\} = \underline{-4\sin(2x+3)}$$

$$f''' = \frac{d}{dx}\{-4\sin(2x+3)\} = \underline{-8\cos(2x+3)}$$

$$f'''' = \frac{d}{dx}\{-8\cos(2x+3)\} = \underline{16\sin(2x+3)}$$

2) $t = 2x+3$ とおく.

$$\frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right) = 2\frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$$

$$= 2^2\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}} = \cdots = 2^n\frac{d^n}{dt^n}f = 2^n\frac{d^n}{dt^n}\sin t$$

$$= 2^n\sin\left(t+\frac{n}{2}\pi\right) = \underline{2^n\sin\left(2x+3+\frac{n}{2}\pi\right)} \quad \left(n\geqq 0\text{で成立}\right)$$

$0\leqq n\leqq 4$ で 1) の答と一致することを確かめるとよい。

公式 $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ を使わないときは場合分けして答える。最も容易な答え方は、下記のようなものだろう。

m を 0 以上の整数として

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n\sin(2x+3) & (n=4m\text{と書けるとき}) \\ 2^n\cos(2x+3) & (n=4m+1\quad〃\quad) \\ -2^n\sin(2x+3) & (n=4m+2\quad〃\quad) \\ -2^n\cos(2x+3) & (n=4m+3\quad〃\quad) \end{cases}$$

あるいは 下記のように、場合分けを2通りに統合してもよい。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\, 2^n \sin(2x+3) & (n\text{が偶数のとき}) \\ (-1)^{(n-1)/2}\, 2^n \cos(2x+3) & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

【補足説明】

[1] 2) $f' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$ は正しい式ではあるので5点中3点を与えたが、この答で十分だと思ってはいけない。

[1] 5) (別解) $f^2 = x + \sqrt{x^2+1}$

両辺を x で微分すると $2f \cdot f' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\therefore\ f' = \frac{1}{2f}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}} \quad (\text{答})$$

注意) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} \overset{(\text{誤})}{=} \sqrt{x} + (x^2+1)^{1/4}$ という誤った式の変形をした答は0点とした。