この部分には記入しないこと

$\boxed{1}$ 次の関数の 1 階導関数を計算せよ.

1. $f(x) = \sin 2x$.
2. $f(x) = (\log x)^2$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \arctan x$,

$\boxed{2}$ $y = \arccos x$ のグラフをかけ. また, $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ の値を求めよ.

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　　名	得　点
微分積分I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邊			/50

2006年度

$\boxed{3}$ 次の関数の与えられた点でのテーラー展開を求めよ．ただし，剰余項は，R_n 等の記号で略記してよい．

1. $f(x) = e^{2x}$, $x = 0$ で 3 次までの展開.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x = 0$ で 3 次までの展開.

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin 2x}.$$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邊			/30

2006年度

この部分には記入しないこと

問題 5　$f(x,y)=x^2y^2-y^4$ について, 偏導関数 f_x, f_y, f_{xy} を計算せよ.

問題 6　$z=f(x,y)$ を全微分可能な関数とする. $x=u+v$, $y=uv$ とするとき, z_u, z_v を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邊			/20

2006年度

$\boxed{1}$ 次の関数の 1 階導関数を計算せよ． 10点×4

1. $f(x) = \sin 2x$.
2. $f(x) = (\log x)^2$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \arctan x$,

1、$f'(x) = \left(\dfrac{d}{dt}\sin t\right)\dfrac{dt}{dx}$ ($t = \sin 2x$ とおいた) $= (\cos t)\cdot 2 = \underline{2\cos 2x}$

2、$f'(x) = \left(\dfrac{d}{dt}t^2\right)\dfrac{dt}{dx}$ ($t = \log x$ とおいた) $= 2t \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{\dfrac{2\log x}{x}}$

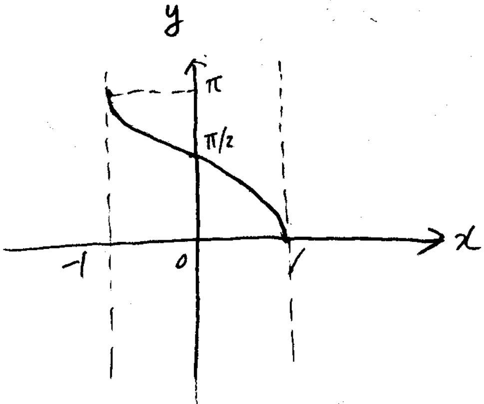
3、$f'(x) = \left(\dfrac{d}{dt}t^{-1}\right)\dfrac{dt}{dx}$ ($t = 1+x^2$ とおいた) $= -t^{-2}\cdot 2x = \underline{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}$

4、$f'(x) = \underline{\dfrac{1}{1+x^2}}$ (公式として覚えているなら答だけでよい)

(別解) $y = \arctan x$ とおくと $x = \tan y$，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1} = \underline{\dfrac{1}{1+x^2}}$

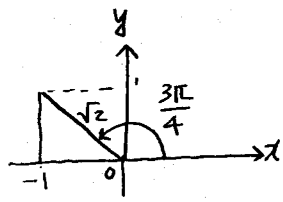
10点、$\boxed{2}$ $y = \arccos x$ のグラフをかけ．また，$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ の値を求めよ． (5点) (5点)



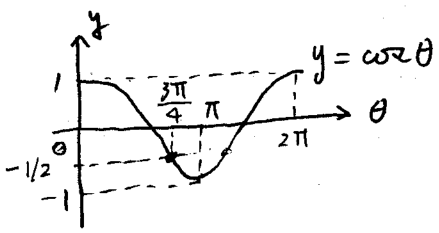
$\theta = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とおくと

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$0 \leq \theta \leq \pi$

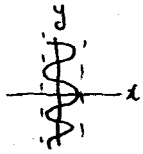
$\therefore \theta = \underline{\dfrac{3\pi}{4}}$



- 「$\theta = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$」は −2点．
- 「$\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$」は −3点



- x軸に座標値 記入全く無し → −1点．
- y 〃 → −1点．
- yをxの多価関数として描く → −2点



- $(x, y) = (-1, \pi)$ と $(1, 0)$ を直線でつないだように みえるグラフ → −1点．

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邉			/50

2006年度

3 次の関数の与えられた点でのテーラー展開を求めよ．ただし，剰余項は，R_n 等の記号で略記してよい．

10点 1. $f(x) = e^{2x}$, $x = 0$ で 3 次までの展開．

10点、2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x = 0$ で 3 次までの展開．

注意「$x=0$ では $f(x)=f(0)=e^0=1$」という誤答が多かった。「$x=0$ で展開」は「$x=0$ の近傍で展開」と同じ意味です。

1、$f(x) = e^{2x}$, $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2e^0 = 2$

$f''(x) = 4e^{2x}$, $f''(0) = 4e^0 = 4$

$f'''(x) = 8e^{2x}$, $f'''(0) = 8e^0 = 8$

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + R_4$$

別解

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

で $x \to 2x$ とおきかえると

$$e^{2x} = \underset{2点}{1} + \underset{2点}{2x} + \underset{2点}{2x^2} + \underset{2点}{\frac{4}{3}x^3} + \underset{2点}{O(x^4)}$$

2、$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f(0) = \dfrac{1}{1-0} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f''(0) = 2$

$f'''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^3}$, $f'''(0) = 6$

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + R_4$$

別解

$$(1+x)^{-1} = \sum_{i=0}^{3} \binom{-1}{i} x^i + O(x^4)$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$$

上式で $x \to -x$ とおきかえると

$$(1-x)^{-1} = \underset{2点}{1} + \underset{2点}{x} + \underset{2点}{x^2} + \underset{2点}{x^3} + \underset{2点}{O(x^4)}$$

10点、**4** 次の極限値を求めよ．

$\alpha = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin 2x}$. と書く.

$x \to 0$ で $\log(1+x) \to 0$, $\sin 2x \to 0$

なので α は $\frac{0}{0}$ 型の不定形の極限である

のでロピタルの定理が適用できて

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{\{\log(1+x)\}'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2\cos 2x}$$

5点

$$= \frac{\frac{1}{1+0}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

別解

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^2)}{2x + O(x^3)}$$

5点、

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x)}{2 + O(x^2)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

符号ミスは −3点

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邉			/30

2006年度

10点、 $\boxed{5}$ $f(x,y) = x^2y^2 - y^4$ について, 偏導関数 f_x, f_y, f_{xy} を計算せよ.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 - y^4) = 2xy^2$$ 3点

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 - y^4) = 2x^2y - 4y^3$$ 4点、 (2点 2点)

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) = 4xy$$ 3点

10点 $\boxed{6}$ $z = f(x,y)$ を全微分可能な関数とする. $x = u + v$, $y = uv$ とするとき, z_u, z_v を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$= z_x \cdot 1 + z_y v$$

$$= z_x + v z_y$$ 5点

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

$$= z_x \cdot 1 + z_y u$$

$$= z_x + u z_y$$ 5点

注意 $\frac{\partial u}{\partial x} \overset{誤}{=} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}$ ではない。

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分I(期末)	07/28/06	保倉・田嶋 古閑・堀邊			/20

2006年度