福井大学工学部 (電気電子・情報メディア・物理・知能システム) 工学科 1年生対象、田嶋教員担当、2006年6月23日1限実施

微分積分 I (B) 中間試験問題用紙

各人に問題用紙1枚、答案用紙1枚 (表裏使用)、計算用紙1枚を配布する。答案用紙1枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

【1】 小問 1) 〜 10) に与えた関数を x で微分した結果を、各小問毎に設定した選択肢 ア〜ウ から選び、答案用紙の解答欄に記号 (ア〜ウ) で答えよ。

1) $(2x+3)^4$	(選択肢：	ア: $4(2x+3)^3$	イ: $8(2x+3)^3$	ウ: $12(2x+3)^3$)
2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$	(選択肢：	ア: $\sqrt{x}$	イ: $-\frac{1}{x\sqrt{x}}$	ウ: $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$)
3) $\sqrt{x^2+1}$	(選択肢：	ア: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	イ: $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$	ウ: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$)
4) 2^x	(選択肢：	ア: $2^x \log x$	イ: $2^x \log 2$	ウ: $2^{x \log 2}$)
5) e^{x^2}	(選択肢：	ア: e^{x^2}	イ: xe^{x^2}	ウ: $2xe^{x^2}$)
6) $\log(1-x)$	(選択肢：	ア: $\frac{1}{x}$	イ: $\frac{1}{1-x}$	ウ: $\frac{1}{x-1}$)
7) $\sin\frac{x}{2}$	(選択肢：	ア: $\cos\frac{x}{2}$	イ: $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$	ウ: $2\cos\frac{x}{2}$)
8) $\tan x$	(選択肢：	ア: $\frac{1}{\tan^2 x}$	イ: $-\frac{1}{\tan^2 x}$	ウ: $\frac{1}{\cos^2 x}$)
9) $\arcsin x$	(選択肢：	ア: $\frac{1}{1+x^2}$	イ: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	ウ: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)
10) $\arccos x$	(選択肢：	ア: $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	イ: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	ウ: $\sqrt{1-x^2}$)

【2】 小問 1), 2) に与えた数式の値を求めよ。

1) $\arctan 1$ 　　 2) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$

【3】 小問 1), 2) に与えた関数を x で微分せよ。

1) $\arctan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 　　 2) $x^{\sin x}$

【4】 小問 1), 2) に示した極限の値を求めよ。

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3^x-3}{\log x}$ 　　 2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

【5】 $y = x^3 \sin 2x$ として、小問 1) 〜 3) に答えよ。

1) 下記の $\boxed{ア}$〜$\boxed{カ}$ に当てはまる x の多項式を解答用紙の解答欄に記入せよ。導出過程は記さず、最終的な答のみを記せ。

$$\frac{dy}{dx} = \left(\boxed{ア}\right)\sin 2x + \left(\boxed{イ}\right)\cos 2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\boxed{ウ}\right)\sin 2x + \left(\boxed{エ}\right)\cos 2x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\boxed{オ}\right)\sin 2x + \left(\boxed{カ}\right)\cos 2x$$

2) 任意の負でない整数 n について $\frac{d^ny}{dx^n}$ を表す式を求めよ。

3) 前小問で得た結果の式を、$\boxed{キ}$と$\boxed{ク}$ を x の多項式として、下記の形に表せ。

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\boxed{キ}\right)2^n \sin\left(2x+\frac{n}{2}\pi\right) + \left(\boxed{ク}\right)2^n \cos\left(2x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

微分積分 I (B) 中間試験 答案用紙

福井大学 工学部 (電気電子・情報メディア・物理・知能システム) 工学科 1 年生対象、　田嶋教員担当、　2006 年 6 月 23 日 1 限実施

【1】 20 点

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)

【2】 1) 5 点

【2】 2) 10 点

【3】 1) 10 点

【3】 2) 10 点

【4】 1) 10 点

【4】 2) 10 点

【5】 1) 15 点

ア)	イ)
ウ)	エ)
オ)	カ)

【5】 の 2) と 3) は裏面に解答せよ.(10 点)

学科		学籍番号									氏名		得点	

微分積分 I (B) 中間試験 答案用紙

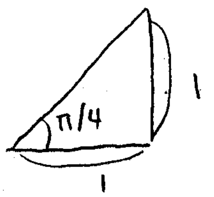
福井大学 工学部 (電気電子・情報メディア・物理・知能システム) 工学科 1 年生対象、 田嶋教員担当、 2006 年 6 月 23 日 1 限実施

【1】 20 点 各2点。

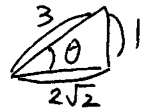
1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
イ	ウ	ウ	イ	ウ	ウ	イ	ウ	ウ	ア

【2】 1) 5 点

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$



【2】 2) 10 点



$\theta = \arcsin\frac{1}{3}$ とおくと.

$\sin\theta = \frac{1}{3}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\therefore \cos\theta > 0$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

【3】 1) 10 点

$$\left\{\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}' = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+x^2+2+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}$$

【3】 2) 10 点

$(x^{\sin x})'$

$= x^{\sin x}(\sin x \log x)'$ (対数微分法)

$= x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right)$

注意 $(x^x)' = x^x(\log x + 1)$ に帰着させて解くことはできません

【4】 1) 10 点

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{3^x-3}^{\to 0}}{\underbrace{\log x}_{\to 0}} \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{3^x\log 3}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3^1\log 3}{\frac{1}{1}} = 3\log 3$$

【4】 2) 10 点

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \exp\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}\overbrace{\log x}^{\to\infty}$$

$$= \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \exp 0 = 1$$

注意 $\exp\frac{1}{x}\log x$ を $e\,\frac{1}{x}\log x$ と書いてはいけない。 $e^{\frac{1}{x}\log x}$ なら正しい書き方ですが。

【5】 1) 15 点 部分点なし

ア) $3x^2$ 1点	イ) $2x^3$ 2点
ウ) $-4x^3+6x$ 3点	エ) $12x^2$ 3点
オ) $-36x^2+6$ 3点	カ) $-8x^3+36x$ 3点

【5】の 2) と 3) は裏面に解答せよ. (10 点)

学科		学籍番号		氏名		得点	[1] [2] [3] [4] [5] 1) [5] 2),3)	合計得点

[5] 2) 6点

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ を利用する。 $t = 2x$ とおくと、$\frac{dt}{dx}=2$ なので

任意の関数 $f(2x)$ $(= f(t))$ に対し

$$\frac{d^n}{dx^n} f(2x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{d}{dx} f(2x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right\} = 2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{d}{dt} f(t)$$

$$= 2^2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-2}} \frac{d^2}{dt^2} f(t) = \cdots\cdots = 2^n \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

が成立する。∴

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin 2x = 2^n \frac{d^n}{dt^n} \sin t = 2^n \sin\left(t+\frac{n\pi}{2}\right) = 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

ライプニッツの公式を利用して

$$y^{(n)} = \binom{n}{0} x^3\, 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right) + \binom{n}{1} 3x^2\, 2^{n-1} \sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$+ \binom{n}{2} 6x\, 2^{n-2} \sin\left(2x+\frac{n-2}{2}\pi\right) + \binom{n}{3} \cdot 6 \cdot 2^{n-3} \sin\left(2x+\frac{n-3}{2}\pi\right)$$

$$= 2^n x^3 \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right) + 3n\, 2^{n-1} x^2 \sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$+ 3n(n-1)\, 2^{n-2} x \sin\left(2x+\frac{n-2}{2}\pi\right) + n(n-1)(n-2)\, 2^{n-3} \sin\left(2x+\frac{n-3}{2}\pi\right)$$

(答)

3) 4点

$$\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(2x+\frac{n-2}{2}\pi\right) = \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}-\pi\right) = -\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(2x+\frac{n-3}{2}\pi\right) = \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}-\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ y^{(n)} = \left(x^3 - \frac{3}{4}n(n-1)x\right) 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$+ \left(-\frac{3n}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{8}\right) 2^n \cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

(答)