情報・知能１年微分積分 IA(田嶋)B(保倉) 共通期末テスト問題 2005/07/29 金 1 限実施

各人に問題用紙 A4 １枚、答案用紙 B4 １枚 (**表裏使用**)、計算用紙 B4 １枚を配布する．

答案用紙 B4 １枚のみを提出し，問題用紙と計算用紙は持ち帰れ．

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ のまわりでテーラー展開せよ．ただし，n を一般の正整数とし，x^{n-1} の項までと剰余項の和で表せ．剰余項の具体的な表式を与える必要はなく，R_n 等と略記してよい (下記**補足説明**参照)．また，この問題に関しては，　**結果**に到る導出過程を書いていない答案に対しても，結果が正解ならば満点を与える．(各 10 点× 3 題)

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = \log(1+x)$

(iii) $f(x) = (1+x)^\alpha$　（ただし，α は実数の定数とする）

$\boxed{2}$ 次の問 (i)〜(ii) に答えよ．　ただし，**結果**だけを書くのではなく、結果に到る導出過程も必ず記せ.(各 10 点× 2 題)

(i) $f(x) = \sin x$ の漸近展開 $(x \to 0)$ を，x^3 の項まで書け．

(ii) $e^{3x}\sin x$ の漸近展開 $(x \to 0)$ を，x^3 の項まで書け．

$\boxed{3}$ 2 変数関数 $f(x,y) = x\sin(xy^2)$ の偏導関数 $f_x,\ f_{xy},\ f_{yy}$ を求めよ.(各 10 点× 3 題)

$\boxed{4}$ $z=f(x,y),\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ のとき，次の問 (i)〜(ii) に答えよ.(各 10 点× 2 題)

(i) z_r, z_θ を，z_x, z_y, r, θ を用いて表せ．

(ii) $z_x,\ z_y$ を $r,\ \theta,\ z_r,\ z_\theta$ を用いて表せ．（ヒント：(i) の結果を用いよ)

[**補足説明**]

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の結果の記述の仕方：**$f(x) = \frac{1}{1+x}$ の場合は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + R_n$$

または

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + R_n$$

と結果を記述できる．これらの記述で，R_n の代わりに $o(x^{n-1})$ または $\mathcal{O}(x^n)$ と書いてもよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の結果の記述の仕方：**$f(x) = \frac{1}{1+x}$ の場合は

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

と結果を記述できる．この記述で，$o(x^3)$ の代わりに $\mathcal{O}(x^4)$ と書いてもよい．

福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分Ⅰ A・B 共通 定期試験 答案用紙

2005年7月29日1限実施

$\boxed{1}$(i)
10点

$\boxed{1}$(ii)
10点

$\boxed{1}$(iii)
10点

$\boxed{2}$(i)
10点

$\boxed{2}$(ii)
10点

$\boxed{3}$(f_x)
10点

$\boxed{3}$(f_{xy})
10点

$\boxed{3}$(f_{yy})
10点

$\boxed{4}$は裏面に解答せよ. 20点

学科		学籍番号									氏名		得点	

2005/7/29 実施分

$\boxed{1}$

(i) $f(x) = e^{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{k} + R_n$ } 10点、

または $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$

(ii) $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k} + R_n$ } 10点、

または $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1} + R_n$

◎ $\sum_{k=0}^{n-1}$ となっていたら −3点、 ◎ $(-1)^{k-1}$ が $(-1)^{k}$ なら，または $(-1)^n$ が $(-1)^{n-1}$ なら −3点、

◎ $\frac{1}{k}$ または $\frac{1}{n-1}$ がまちがっていたら −3点、 ◎ $n=2n'-1$ または $n=2n'$ として偶奇の片方の場合についてだけ答えたら −−− −3点、

(iii) $f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^{k} + R_n$ } 10点、

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$\binom{\alpha}{k}$ を ${}_{\alpha}C_{k}$ と書いても良い

または $f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$

$$\cdots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

◎ $\binom{\alpha}{k}$ の定義が書いていなければ −1点、

◎ $\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$ と書き表したら −1点、 ($\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$ と考えるなら正しいが不注意にすぎないとも考えられるので減点)

◎ 全項で一貫して $\frac{1}{k!}$ をつけ忘れたがそれ以外は正しい → 2点だけ与えた、

$\boxed{1}$ の(i)〜(iii)を通じて、

◎ $\cdots + [redacted] x^n + R_n$ と書いたら −2点、

◎ $\cdots + [redacted] x^n + R_{n+1}$ と書いたら −1点、

◎ $n-1$ 次の項が全く不正解なら、あるいは $n-1$ 次の項が省略されているなら

0〜3次の項をみて、それが正解なら3点を与える

2

(i) $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$

← 2点

3点

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^4) = \underbrace{x - \frac{1}{6}x^3 + \overset{大}{O}(x^4)}_{5点}$$

(0〜3次の係数と $O(x^4)$ に夫々1点)

⊙ $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$ にあたる式や代入が式の変形中で省略されていなければよい。省略されていたら減点する

⊙ $f''''(x)$ を求めずに $+\overset{大}{O}(x^5)$ と書いていたら −1点する

(ii) $f(x) = e^{3x}\sin x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = 3e^{3x}\sin x + e^{3x}\cos x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = 9e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x$

$= 8e^{3x}\sin x + 6e^{3x}\cos x$, $f''(0) = 6$

$f'''(x) = 24e^{3x}\sin x + 8e^{3x}\cos x + 18e^{3x}\cos x - 6e^{3x}\sin x$

$= 18e^{3x}\sin x + 26e^{3x}\cos x$, $f'''(0) = 26$

5点。計算式が十分な量書いてあればよい。

$$\therefore f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^4) = x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{26}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$= \underbrace{x + 3x^2 + \frac{13}{3}x^3 + O(x^4)}_{5点}$$

(0〜3次の係数, $O(x^4)$ に夫々1点)

(別解) $e^{3x} = \sum_{k=0}^{2} \frac{(3x)^k}{k!} + O(x^3) = \underset{1点}{1} + \underset{1点}{3x} + \underset{1点}{\frac{9}{2}x^2} + O(x^3)$ → 3点。

$e^{3x}\sin x = (1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + O(x^3))(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4))$ → 計算方法に2点。

$= x + 3x^2 + \frac{9}{2}x^3 + O(x^4) - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$

$= x + 3x^2 + (\frac{9}{2} - \frac{1}{6})x^3 + O(x^4)$

$$= \underbrace{x + 3x^2 + \frac{13}{3}x^3 + O(x^4)}_{5点}$$

(0〜3次の係数と $O(x^4)$ に夫々1点)

4次以上の項を書いて誤っているなら各項1点をひく。

($f(x) = x + 3x^2 + \frac{13}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{29}{30}x^5 + \frac{13}{10}x^6 + \frac{307}{630}x^7 + \frac{2}{15}x^8 + \cdots$)

$\boxed{3}$

$f(x,y) = x\sin(xy^2)$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f = \sin(xy^2) + x\cos(xy^2)\, y^2$$

$$= \sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)$$

⊙ f_xでなくf_{xx}を計算した場合は、式中でf_xが正しければ5点を与える

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \cos(xy^2)x\cdot 2y + x\cdot 2y\cos(xy^2) + xy^2(-\sin(xy^2))x\cdot 2y$$

$$= 2xy\cos(xy^2) + 2xy\cos(xy^2) - 2x^2y^3\sin(xy^2)$$

$$= 4xy\cos(xy^2) - 2x^2y^3\sin(xy^2)$$

⊙ f_xをまちがえている場合は、その誤ったf_xに対し正しい$\frac{\partial}{\partial y}f_x$が計算できていれば5点を与える。 ⊙ f_{yx}の順で計算したら…… 減点しない。

⊙ f_{xy}でなくf_{xx}を計算した…… 0点とする

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} f = x\cos(xy^2)\cdot x\cdot 2y = 2x^2y\cos(xy^2)$$ ここまで正解で5点を与える

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = 2x^2\cos(xy^2) + 2x^2y(-\sin(xy^2))\cdot x\cdot 2y$$

$$= 2x^2\cos(xy^2) - 4x^3y^2\sin(xy^2)$$

⊙ f_yがまちがっていても、その誤ったf_yに対し正しい$\frac{\partial}{\partial y}f_y$が計算できていれば5点を与える。

$\boxed{3}$ 全体について

⊙ 計算ミス1ケ所につき5点減点する。
(写しまちがいも含める)
したがって2ケ所まちがえたら0点とする

⊙ 答だけを書いた場合、正答なら10点、わずかでもちがえば0点とする

⊙ まとめられる項をまとめていない、約分できるのにしていない → -1点 または -2点

⊙ fのかわりに(断りなく)zと書く(例 $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \cdots$) → 各問ごとに1点ひく

$\boxed{4}$

(i)
$$\begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

⊙ 偏微分に各1点で計4点。(但し答が合計0点のときのみ)

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta & \cdots 5点。 \\ z_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta & \cdots 5点。 \end{cases}$$

少しでもちがえば0点。

⊙ (i)は計算過程が全く書いていないとき((i)全体で)3点減点する

(ii)
$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} z_x = z_r \cos\theta - z_\theta \frac{\sin\theta}{r} & \cdots 5点。 \\ z_y = z_r \sin\theta + z_\theta \frac{\cos\theta}{r} & \cdots 5点。 \end{cases}$$

⊙ 計算過程には点を与えず答のみで評価する。
(∵ 2乗するなど見当ちがいの計算が多いので評価しにくい)

⊙ 答に符号のちがいがある：5点 → 3点。

⊙ 答に符号以外のミスがあるが0点をつけるのは忍びない：5点 → 1点。

⊙ 式の整理不足 → おのおの(5点から) 1点減点する

例 ・ $z_x = \dfrac{z_r r - z_\theta \tan\theta}{r(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta)}$ は4点。

・ $z_y = \dfrac{z_r r\tan\theta + z_\theta}{r(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta)}$ は4点。

・ $\tan\theta\cos\theta$ を $\sin\theta$ になおしていない， $(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta$ が残っている → −1点。