情報・知能１年生 微分積分ＩＡ（田嶋）・Ｂ（保倉）共通 中間テスト問題 2005年6月17日1限実施

各人に問題用紙 A4 1枚、答案用紙 B4 1枚 (表裏使用)、計算用紙 B4 1枚を配布する。
答案用紙 B4 1枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

注意: $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は $\arctan x$, と書いてもよい.
これは、論述式試験である. 単に答のみでなく、必要な途中経過・考察も記入すること.

1. 逆三角関数について, 次の方程式をそれぞれ解け（各１５点）

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \mathrm{Tan}^{-1}\,\sqrt{5}$

(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{1}{3} + \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{7}{9}$

2. 次の関数のグラフとして得られる曲線の与えられた点での接線を, それぞれ求めよ（各１０点）

(1) $y = x\ \log\ x$ $(x = 1$ での接線$)$

(2) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{x^2}{2}$ $(x = \sqrt{2}$ での接線$)$

3. 次の極限値をそれぞれ求めよ（各１０点）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x-e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

4. 次の関数の n 次 $(n \geq 1)$ の導関数をそれぞれ求めよ。（各１５点）

(1) $\log\ (1+x)$

(2) $x^2\ \sin(2x)$

福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分I A・B 共通 中間試験 答案用紙

2005年6月17日1限実施

1.(1)
15点

1.(2)
15点

2.(1)
10点

2.(2)
10点

3.(1)
10点

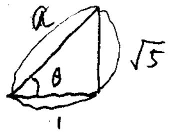
3.(2)
10点

4.(1)
15点

4.(2) は裏面に解答せよ. 15点

学科		学籍番号		氏名		得点	

1. (1) $\arccos x = \arctan\sqrt{5} = \theta$ とおくと $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \cos\theta$, $\tan\theta = \sqrt{5}$



左図で $a = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\therefore\ x = \cos\theta = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ (答)

注
$\arccos x = \theta \iff \begin{cases} x = \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$
なので
$\arccos x = \theta \Rightarrow x = \cos\theta$

(別解) $\arccos x = \arctan\sqrt{5} = \theta$ とおくと $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \cos\theta$, $\tan\theta = \sqrt{5}$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{6}$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta > 0$ $\quad\therefore\ \cos\theta = \sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ (答)

部分点

15点 … 満点

14点 … { ささいなミス1ケ所につき1点減点
答が $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ になっているとき

12点 … 説明が不十分な場合

例 $\frac{1}{\sqrt{6}}$ の計算式がない。例えば「$x = \cos(\arctan\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$」という答

10点 … { 直角三角形の図で斜辺の長さが 2 ($= \sqrt{5}-1$ としたと思われる) になっているとき
答が $x = \sqrt{6}$ になっているとき

7点 … 答以外の記述が意味不明。

5点 … 答のみを書いて正答であるとき

2005年6月17日実施

1.(2) $\arccos x = \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{7}{9}$

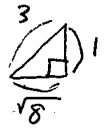
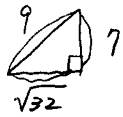
$\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ とおくと. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$] 5点

$\underbrace{\underbrace{\beta = \arcsin\frac{7}{9}\text{とおく}}_{1点}\text{と.}\ \sin\beta = \frac{1}{3}}_{2点}$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\underbrace{\cos\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{49}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}}_{3点}$] 5点

$\arccos x = \alpha + \beta$ より $x = \cos(\alpha+\beta)$

$x = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4\cdot\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{16-7}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

・「$\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$」が求まっていれば10点となる

・  ,  という直角三角形が描いてあれば式が不十分でも10点を与えることもある.

・ささいなミスは1点引き.

・ささいでないかもしれない(本質的に誤解しているかもしれない)ミスは3点引き

2、(1) $y = x\log x$, $x = 1$

$x=1$ で $y = 1\cdot\log 1 = 1\cdot 0 = 0$

$y' = x'\log x + x(\log x)' = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$

$x=1$ で $y' = \log 1 + 1 = 0+1 = 1$

$x=1$における接線の方程式は

$$y - 0 = 1\cdot(x-1) \qquad \therefore\ y = x - 1$$

- xの係数が 1 …… 5点
- 定数項が -1 …… 5点

} 合計10点

- xの係数も定数項も共に誤りの場合のみ下記の部分点を与えることがある
  - 「$y' = \log x + 1$」… この式に1点
  - 「$x=1$ で $y=0$」または「接点の座標は$(1, 0)$」… 1点

} 部分点は2点まで

- ケアレスミスは1点減点（例 直前の行まで正しいのに答で写しまちがえたとき）

2、(2) $y = \arctan\frac{x^2}{2}$, $x = \sqrt{2}$

$x=1$ で $y = \arctan\frac{\sqrt{2}^2}{2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{x}{1+\frac{x^4}{4}}$$

$$x=\sqrt{2}\ \text{で}\ y' = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{(\sqrt{2})^4}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x=1$における接線の方程式は

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \qquad \therefore\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi}{4} - 1$$

- xの係数が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… 5点
- 定数項が $\frac{\pi}{4} - 1$ …… 5点
- xの係数も定数項も誤りの場合に限り下記の部分点を与えることがある
  - 「$y' = \dfrac{x}{1+\frac{x^4}{4}}$」… この式に1点
  - 「$x=\sqrt{2}$ で $y = \frac{\pi}{4}$」または「接点の座標は$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$」… 1点

} 部分点は2点まで

- ケアレスミスは1点減点。

3. (1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x-e^x} \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^x} \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{-e^x} = -2$$

$x^2 \to 0$, $1+x-e^x \to 0$, $2x \to 0$, $1-e^x \to 0$

3点　6点　10点

・ロピタルの定理を利用したと書いていなくても減点しない
・ロピタルの定理の適用条件に合致していることを明記していなくても減点しない。

3. (2)
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\log x\right) = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$

$\log x \to \infty$, $x \to \infty$

3点

$$\overset{\text{ロピタル}}{=} \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \exp 0 = 1$$

6点　9点　10点

・「$\infty^0 = 1$ である」と、理由なく断定した場合は 0点、
・答が 1 となっていても 根拠が示されていなければ 0点。
・$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ が理由なく使われているが、それを除けば
解答として完璧 → 5点を与えた
・$(x^{1/x})'$ を求めてある → 全く評価せず、部分点は与えない

4. (1) $\{\log(1+x)\}^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} = \left\{(-1)\frac{1}{(1+x)^2}\right\}^{(n-2)} = \left\{(-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}\right\}^{(n-3)}$

$= \cdots = (-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-(n-1))\cdot\frac{1}{(1+x)^n}$ ここまでなら10点.

$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

5点. 5点. 5点.

この点の合計をP点とする

- $(-1)^{n-1}$ が $(-1)^n$ となっていたら(5点引きで)0点
- $(n-1)!$ が $n!$ となっていたら(5点引きで)0点
- $\frac{1}{(1+x)^n}$ が少しでもちがっていたら(5点引きで)0点.
- 答の導出過程が不完全でも減点はしない
- $\{\log(1+x)\}' = \frac{1}{1+x}$

  $\{\log(1+x)\}'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

  $\{\log(1+x)\}''' = \frac{2}{(1+x)^3}$

  $\{\log(1+x)\}'''' = -\frac{6}{(1+x)^4}$

  $\{\log(1+x)\}^{(5)} = \frac{24}{(1+x)^5}$

  $\{\log(1+x)\}^{(6)} = -\frac{120}{(1+x)^6}$

  $\{\log(1+x)\}^{(7)} = \frac{720}{(1+x)^7}$

  各階の微分が正しく計算できていれば、それぞれ1点をカウントする。この点の合計をQ点とする

- 得点は $\max(P, \min(Q, 15))$ とする。

4. (2) $\{x^2\sin 2x\}^{(n)} = \binom{n}{0}(\sin 2x)^{(n)}x^2 + \binom{n}{1}(\sin 2x)^{(n-1)}\cdot 2x + \binom{n}{2}(\sin 2x)^{(n-2)}\cdot 2$

$$= \underbrace{2^n x^2 \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)}_{5点} + \underbrace{2^n n x \sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)}_{5点} + \underbrace{2^{n-2} n(n-1)\sin\left(2x+\frac{n-2}{2}\pi\right)}_{5点}$$

・各項で 2のべきに1点，2項係数からくる係数に1点，xのべきに1点，三角関数に2点（符号も含めて），合計5点。

・2項係数を $\binom{n}{2}$ 等のまま使っている場合，(3項毎にでなく全体で) 1点を引く。

・(n階微分の式が書いていないとき) ライプニッツの公式が正確に書いてあれば3点を与える。

・$(x^2\sin 2x)' = 2x^2\cos 2x + 2x\sin 2x$

$(x^2\sin 2x)'' = -4x^2\sin 2x + 8x\cos 2x + 2\sin 2x$

$(x^2\sin 2x)''' = -8x^2\cos 2x - 24x\sin 2x + 12\cos 2x$

$(x^2\sin 2x)^{(4)} = 16x^2\sin 2x - 64x\cos 2x - 48\sin 2x$

$(x^2\sin 2x)^{(5)} = 32x^2\cos 2x + 160x\sin 2x - 160\cos 2x$

$(x^2\sin 2x)^{(6)} = -64x^2\sin 2x + 384x\cos 2x + 480\sin 2x$

$(x^2\sin 2x)^{(7)} = -128x^2\cos 2x - 896x\sin 2x + 1344\cos 2x$

$(x^2\sin 2x)^{(8)} = 256x^2\sin 2x - 2048x\cos 2x - 3584\sin 2x$

各階の微分が正しく書いてあれば，その合計数をQとせよ。Qが他の基準でつけた得点を上回るときはQを得点とせよ。但し，もしQが15をこえる場合は15点とせよ。