福井大学 工学部
情報・知能 1年生

微分積分 I $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{A・B}}{\text{共通}}$ 定期試験

問題・答案用紙
2004 年 7 月 30 日 1 限実施

1. 下記の小問 (i)〜(iii) の極限値を求めよ。(各 10 点)

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$

2. 下記の小問 (i)〜(ii) に答えよ。(各 10 点)

(i) $f(x) = e^{2x}\cos x$ を $x = 0$ の近傍で x^2 の項までテーラー展開せよ。剰余項は R_3 と略記してよい。

(ii) $f(x) = (1+x)^{5/3}$ を $x = 0$ の近傍で x^3 の項までテーラー展開せよ。剰余項は R_4 と略記してよい。

3.　2変数関数 $f(x,y) = x\sin(x-y^2)$ の偏導関数 f_x, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。(30点)

4.　$z = (x^2+1)^y$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ とする。このとき、$\frac{dz}{dt}$ を $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ を用いて表せ。(10点)

5.　z は2変数 x, y の関数であり、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ である。このとき、z_x, z_y を r, θ, z_r, z_θ を用いて表せ。(10点)

2004/7/30 実施分

[1] (i) 10点

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

($e^x-e^{-x}\to 1-1=0$, $x\to 0$) 6点

又は

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+O(x^2)-(1-x+O(x^2))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+O(x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\{2+O(x)\} = 2$$

(ii) 10点

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} \underset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

($\cos x-1\to 1-1=0$, $x^2\to 0$, $-\sin x\to 0$, $2x\to 0$) 4点 8点

又は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left\{-\frac{1}{2}+O(x^2)\right\}}_{=-\frac{1}{2}}$$

又は

$$\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x+1} \xrightarrow{(x\to 0)} -1\cdot\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

● (iii) 10点

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = \exp\lim_{x\to\infty}\left(x\log\frac{x+2}{x-1}\right) = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\log\frac{x+2}{x-1}}{\frac{1}{x}}$$

($\frac{x+2}{x-1}\to 1$, $\log\frac{x+2}{x-1}\to 0$, $\frac{1}{x}\to 0$)

$$\underset{\text{ロピタル}}{=} \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{(x+2)(x-1)} = \exp 3 = e^3$$

又は

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x/2}\right\}^2 \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= e^2\cdot e = e^3 \quad \left(\because \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right)$$

● 又は

$$\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = \left\{\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right\}^3\cdot\left(1+\frac{3}{x-1}\right) \xrightarrow{(x\to\infty)} e^3\cdot 1 = e^3$$

(注) (i)〜(iii) それぞれについて.

途中で lim 記号が抜けてしまう → −2点.

ロピタルの定理の適用条件確認をしない → 減点せず.

ケアレスミス (誤転記, = が抜ける, = を → と書くなど) → −1点.

答しか書いていない → 正答なら1点を与え, 誤答なら0点.

ロピタルの定理に沿う微分はしたが, $x=0$ を代入していない → 最高2点まで与えうる

(ii) について

答が「$\pm\frac{1}{2}$」になっている → −2点

[2] (i)
10点

$f(x) = e^{2x}\cos x$, $f(0) = e^0 \cos 0 = 1\cdot 1 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$, $f'(0) = 2 - 0 = 2$

$f''(x) = 4e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x - 2e^{2x}\sin x - e^{2x}\cos x$, $f''(0) = 4 - 1 = 3$

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R_3$$

$$= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + R_3$$

又は.

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$

$$\therefore f(x) = \{1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)\}\{1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\}$$

$$= 1 + 2x + (2 - \tfrac{1}{2})x^2 + O(x^3) = \underbrace{1}_{2点} + \underbrace{2x}_{4点} + \underbrace{\frac{3}{2}x^2}_{4点} + \underset{R_3}{\underset{\downarrow}{O(x^3)}}$$

(ii)
10点

$f(x) = (1+x)^{5/3}$

$$= \binom{5/3}{0} + \binom{5/3}{1}x + \binom{5/3}{2}x^2 + \binom{5/3}{3}x^3 + R_4$$

$\binom{5/3}{0} = 1$, $\binom{5/3}{1} = \frac{5}{3}$, $\binom{5/3}{2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{9}$, $\binom{5/3}{3} = \frac{5}{9}\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{3} = -\frac{5}{81}$

$$\therefore f(x) = 1 + \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 + R_4$$

又は $f(x) = (1+x)^{5/3}$, $f(0) = 1^{5/3} = 1$

$f'(x) = \frac{5}{3}(1+x)^{2/3}$, $f'(0) = \frac{5}{3}$

$f''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{-1/3}$, $f''(0) = \frac{10}{9}$

$f'''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{3})(1+x)^{-4/3}$, $f'''(0) = -\frac{10}{27}$

㊟ 微分式にミスがあっても、0を代入して係数が同じなら減点しない

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + R_4$$

$$= \underbrace{1}_{1点} + \underbrace{\frac{5}{3}x}_{3点} + \underbrace{\frac{5}{9}x^2}_{3点} \underbrace{- \frac{5}{81}x^3}_{3点} + R_4$$

㊟ (i) (ii) それぞれについて.

- 答しか書いていない --- 得点を $\frac{1}{2}$ 倍する
- $f'(x)$, $f''(x)$ 等を計算して終っている ---- 0点
- R_3 の他に x^3 の項がある, R_4 の他に x^4 の項がある ---- −1点
- ケアレスミス(写しまちがい, 符号ミス) --- −1点

[3]

$$f(x,y) = x \sin(x-y^2)$$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f = \sin(x-y^2) + x\cos(x-y^2) \quad (10点)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \cos(x-y^2)\cdot(-2y) + x\left(-\sin(x-y^2)\right)\cdot(-2y)$$

$$= -2y\cos(x-y^2) + 2xy\sin(x-y^2) \quad (10点)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} f = x\cdot\cos(x-y^2)\cdot(-2y) = -2xy\cos(x-y^2)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = -2x\cos(x-y^2) - 2xy\cdot(-\sin(x-y^2))\cdot(-2y)$$

$$= -2x\cos(x-y^2) - 4xy^2\sin(x-y^2) \quad (10点)$$

又は: $\sin(x-y^2)$ を加法定理で分解してから微分する者もある.

[4] $z = (x^2+1)^y$

10点

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(x^2+1)^{y-1}\cdot 2x = 2xy(x^2+1)^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2+1)^y \log(x^2+1)$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}_{2点} = \underbrace{2xy(x^2+1)^{y-1}\frac{dx}{dt}}_{4点} + \underbrace{(x^2+1)^y\{\log(x^2+1)\}\frac{dy}{dt}}_{4点}$$

注 [3] について: f_x, f_{xy}, f_{yy} の夫々につき,

- ミス1箇所につき −5点
- f_x がまちがっていると, f_{xy} も 0点となることが多い
- f_{yy} の得点が3点以下のとき, f_y が正しく計算できていれば, f_{yy} の点を3点とする.
- d と ∂ の区別は不問とする

[4] について

- d と ∂ の区別が1箇所以上まちがっている ⟶ 1点だけ減点する
- $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めて終わっている → $\frac{\partial z}{\partial x}$ に2点, $\frac{\partial z}{\partial y}$ に2点, d でなく ∂ を使っていればさらに1点, 合計5点まで

[5]

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -r\sin\theta, & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \frac{1}{r\cos^2\theta + r\sin^2\theta} \begin{bmatrix} r\cos\theta, & -\sin\theta \\ r\sin\theta, & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta, & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta, & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ z_x = \cos\theta \, z_r - \frac{\sin\theta}{r} z_\theta$$

$$z_y = \sin\theta \, z_r + \frac{\cos\theta}{r} z_\theta$$

注 この問のみ甘く採点する。 Bクラスは解答した者が少く，採点基準がたまらず。

- ミス1箇所につき −1点.
- ∂とdの区別が1箇所以上まちがっている → −1点.
- $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ の4式の計算をして終っている → 各1点 合計4点まで与えうる
- $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y}$ にあたる式があれば，他に見るべきものがなくても3点を与える．（∂とdがちがっていれば2点となる）