

1. 逆三角関数について、次の問に答えよ。(各15点)

(1) $\tan\left(\arctan\frac{3}{5}\right)$ の値を求めよ.

(2) $y = \arccos(2x)$ のグラフを描け。

(x 軸は横軸, y 軸は縦軸として描くこと)

2. 関数 $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。(10点)

3. 次の関数の導関数を求めよ。(各10点)

(1) $\arccos(3x)$

(2) $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

(3) x^x

4. $n = 1, 2, 3$ について、次の関数の n 階導関数を求めよ。(各15点)

(1) $\log(x-1)$

(2) $x^2 \sin x$

1. (1) 答 $\frac{3}{5}$ のみで満点15点を与える

\arctan の逆関数か \tan であることより理由は自明なので説明不要

もし $\arctan(\tan x)$ なら値域、定義域についての記述が必要だがこの内では必要ない。

(2) 「 x の最小値 $-\frac{1}{2}$ 」, 「 x の最大値 $\frac{1}{2}$ 」, 「 $y=0$ で x 最大」, 「 $y=\pi$ で x 最小」

「 $0 \leq y < \pi$ の枝が選ばれていること」の5項目に各3点、合計15点。

• $f'(\pm \frac{1}{2}) = -\infty$ になっているかどうか --- 不問とする

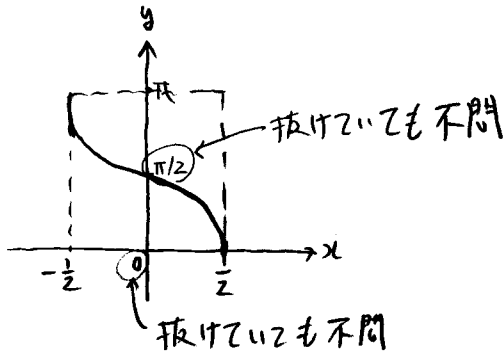
• $y = \cos 2x$ のグラフを描いた --- 0点。

• $y = \cos 2x$ と $y = \arccos 2x$ のグラフを一枚のグラフに描き込み、

どちらのカーブがどちらの関数か区別を明記していない --- -2点

• $y = x$ に関して折り返して描くという作図法がみとれるか、

できた図はまちがっている --- 2点以下0点を与える



2. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$ \uparrow 2点

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ \uparrow 4点

$|y| < \sqrt{y^2 + 1}$, $e^x > 0$ より「 \pm 」の「 $-$ 」は不適 ← 理由なく「 \pm 」の「 $+$ 」のみを

$\therefore e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ \uparrow 9点

$\therefore x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ \uparrow 10点

• $x = \log(y \pm \sqrt{y^2 + 1})$ という答には 6点

• 「 $x = \operatorname{arcsinh} y$ 」 という答 --- 0点

• 「 $x = \operatorname{arcsinh} y = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$ 」 とのみ答に答える --- 1点

• グラフが描かれている --- 評価の対象にしない

残れば -2点

3.

$$(1) \{ \arccos(3x) \}' = \ominus \frac{\textcircled{3}}{\sqrt{1-9x^2}} \leftarrow \begin{matrix} \text{3点} \\ \text{3点} \end{matrix}$$

• $\sqrt{1-x^2}$ は $\sin(\arccos x)$ と書く --- 3点.

• $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を知っていることがみとれる --- 3点以下の点を与えらることはある

$$(2) \left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)' = 1 \cdot (1-x)^{-1/2} + x \left(-\frac{1}{2} \right) (1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{1-x} - x \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{-1}{1-x} \right) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} \right)$$

• 積・商・対数微分など解き方が分かる。どの解き方でも、ミス一つ起こると3点を引く。

• 最も多い誤答は符号を1箇所まちがえて $\frac{2-3x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$ としたの --- 7点を与えらる

$$(3) (x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} (1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\log x + 1)$$

• $x^x (\log x - 1)$ --- 7点まち

$$4. (1) \log(x-1)' = \frac{1}{x-1}, \quad \{ \log(x-1) \}'' = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad \{ \log(x-1) \}''' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

各5点 $\times 3 = 15$ 点.

各階、正答のみ5点, 少しでもちがえば0点.

n階の一般式が について書いてあっても採点の対象にしない

$$(2) (x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$(x^2 \sin x)'' = (2-x^2) \sin x + 4x \cos x$$

$$(x^2 \sin x)''' = -6x \sin x + (6-x^2) \cos x$$

• 各階に、正答のみ5点, 少しでもちがえば0点.

• 正答でも、項の整理をしていないときは4点とす ($2x \cos x + 2x \cos x$ は $4x \cos x$ に書き直していない) など

• Leibnizの公式 による n階の一般式しか書いていないときは

その式が正解なら10点を与えらる。まちがってれば部分点を与えらることはある。