2003/6/27 実施

1. 次の関数の 1 階導関数を計算せよ.

(a) $f(x) = x \sinh x$.

(b) $f(x) = e^{x^3}$.

(c) $f(x) = (2x-1)^{10}$.

(d) $f(x) = (\arccos x)^2$.

試験科目名		学科・学籍番号	氏　名	点　数
微分積分I	1 枚目/4 枚中			

（この部分に記入しないこと）　とじしろ　（この部分に記入しないこと）

2. 次の関数の与えられた点での接線の方程式を求めよ．

(a) 関数 $y = \arctan x$ の $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ での接線の方程式．

(b) 媒介変数 θ を用いて表示された曲線 $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ の $\theta = \frac{\pi}{3}$ での接線の方程式．

試験科目名		学科・学籍番号	氏　名	点　数
微分積分I	2 枚目 / 4 枚中			

3. 次の関数の与えられた点でのテーラー展開を求めよ．ただし，剰余項の具体的な形は与えなくてもよく、R_n 等の記号で略記すればよい。

(a) $f(x) = x\log(1-x)$, $x=0$ で 3 次までの展開．

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x=0$ で 3 次までの展開．

(c) $f(x) = e^{3x}$, $x=0$ で n 次までの展開．ただし，n は 1 以上の整数．

(d) $f(x) = \sinh x$, $x=0$ で $2m+1$ 次までの展開．ただし，m は 1 以上の整数．

試験科目名		学科・学籍番号	氏　名	点　数
微分積分 I	3 枚目/4 枚中			

4. 次の関数のグラフの概形を書け．ただし，x 軸や y 軸とグラフの交点がある場合には，その値をグラフに書き入れる事．

(a) $y = \tanh x$.

(b) $y = \arccos x$.

試験科目名		学科・学籍番号	氏　名	点　数
微分積分 I	4 枚目／4 枚中			

2003/6/27 実施分

1、 32点 = 8点×4問

(a) $f' = (x \sinh x)' = \sinh x + x \cosh x$

$f' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + x\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{x+1}{2}e^x + \dfrac{x-1}{2}e^{-x}$

(b) $f' = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3}$

対数微分法を迂回してくる解答もある

(c) $f' = \{(2x-1)^{10}\}' = 10(2x-1)^9 \cdot 2 = 20(2x-1)^9$

(d) $f' = \{(\arccos x)^2\}' = 2(\arccos x)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$

2、 18点 = 9点×2問

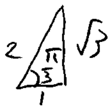
(a) $y\left(x=\frac{1}{\sqrt3}\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt3} = \frac{\pi}{6}$

$y' = (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'\left(x=\frac{1}{\sqrt3}\right) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$

接線の方程式: $y = y\left(x=\frac{1}{\sqrt3}\right) + y'\left(x=\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt3}\right)$

$= \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt3}\right) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt3}{4}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$, $\dfrac{dy}{dx}\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt3$



$y\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $x\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt3}{2}$

接線の方程式: $y = y\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) + \dfrac{dy}{dx}\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right)\left(x - x\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \sqrt3\left(x - \dfrac{\sqrt3}{2}\right) = -\sqrt3 x + 2$

3、 32点 = 8点×4問

(a) $f(x) = x\log(1-x)$, $f(0) = 0\cdot\log 1 = 0$

$f'(x) = \log(1-x) + \dfrac{x}{x-1}$, $f'(0) = \log 1 + 0 = 0$

$\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $f''(0) = \dfrac{1}{-1} - \dfrac{1}{1} = -2$

$f'''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)^3}$, $f'''(0) = -\dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{-1} = -1-2 = -3$

$\therefore f(x) = 0 + 0\cdot x + \dfrac{-2}{2!}x^2 + \dfrac{-3}{3!}x^3 + R_4 = -x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + R_4$

(別解) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_4$ より

$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + R_4 \quad \therefore x\log(1-x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} + R_4'$

3、(b) $f(x) = (1+x)^{1/2}, \quad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}$

$\therefore f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3 + R_3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4$

(別解) $f(x) = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + R_4$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + R_4 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4$

(c) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_{k+1}$ より

$e^{3x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(3x)^k + R'_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}x^k + R'_{n+1}$

(別解) $(e^{3x})^{(k)} = 3^k e^{3x}$ より $\left[(e^{3x})^{(k)}\right]_{x=0} = 3^k, \quad \therefore e^{3x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}x^k + R_{n+1}$

・Σを使わず $+ \cdots (\ ) + R_{n+1}$ となっている場合

・$+ R_n$ となっている場合　n次項があれば OK.

(d) $f(x) = \sinh x, \quad f^{(2m)} = \sinh x, \quad f^{(2m)}(0) = 0$

$f^{(2m+1)} = \cosh x, \quad f^{(2m+1)}(0) = 1$

$\therefore f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2m+3}$

・R_{2m+2} の場合

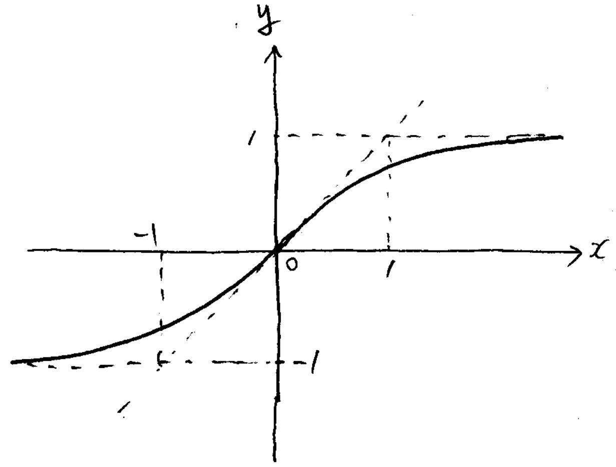
(別解) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2m+3}$

4. (a)

18点
॥
9点×2問



(b)