情報、知能 微分積分I　試験　2002.8.2

________学科 平成____年度入学 番号________番 氏名__________________ 1/2

問題 1 $f(x)=\sin 2x$ のマクローリンの公式 ($x=0$ のまわりでのテーラーの公式) を x^5 の項まで求めよ。剰余項の具体的な式は必要なく、R_6 と略記すればよい。

問題 2 つぎの不定形の極限値を求めよ。 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)$

問題 3 $z=e^{x-y^2}$ とする。x と y が t の関数であり $\bigl($すなわち $x=x(t),\ y=y(t)\bigr)$、$t=0$ で $x=1, y=2$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}, \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{3}$ であるとき、$\frac{dz}{dt}$ の $t=0$ での値を求めよ。

問題 4 関数 $f(x,y)$ が関係式 $x\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial x}$ を満たすとする。このとき、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で定義される極座標に関して $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ が成立することを示せ。

問題 5 関数 $f(x,y) = -6xy + x^3 + y^3$ についてつぎの問の答えよ。

(a) $f_x = 0$、$f_y = 0$ となる点 (x,y) をすべて求めよ。

(b) 上の (a) で求めた各々の点について、$f(x,y)$ が極大値をとる、極小値をとる、極値をとらないのいづれであるかを判定せよ。

解答・採点基準

情報、知能 微分積分I 試験 2002.8.2

____学科 平成____年度入学 番号________番 氏名____________ 1/2

問題1 $f(x)=\sin 2x$ のマクローリンの公式（$x=0$ のまわりでのテーラーの公式）を x^5 の項まで求めよ。剰余項の具体的な式は必要なく、R_6 と略記すればよい。

20

$f(0)=0$

$f'=2\cos 2x,\ f'(0)=2$

$f''=-4\sin 2x,\ f''(0)=0$

$f'''=-8\cos 2x,\ f'''(0)=-8$

$f^{(4)}=16\sin 2x,\ f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}=32\cos 2x,\ f^{(5)}(0)=32$

$\therefore f(x)=0+2x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-8}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{32}{5!}x^5+R_6$

$=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+R_6$ …なければ(-1)

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

フゴウ各々(-3) (6) (7) (7) 他の項…(-6)づつ

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+R_6'$

$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^5}{120}+R_6$

$=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+R_6$

$\frac{4}{3}=\frac{2^3}{3!}$，$\frac{4}{15}=\frac{2^5}{5!}$ も可

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n$ に 2点

使う式5項＋R6で係数全部合っていたら 4点

問題2 つぎの不定形の極限値を求めよ。 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)$

20

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}$ 」3　$\frac{0}{0}$ なし 2点

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}$ 」8

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}$

$2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$ 」13

$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x}$ 」18

$6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x$

$=\frac{-1}{2+4}=-\frac{1}{6}$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)-x}{x^2(x+O(x^3))}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^3+O(x^5)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}+O(x^2)}{1+O(x^2)}$

$=-\frac{1}{6}$

計算ミス -2づつひく

ロピタルを正しく使おうとしていてせつめいもある…

分母・分子のわけ方はいろいろです

$\frac{\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)'}{(x^2)'}=\frac{-\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}}{2x}$

$\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(2x\sin^2 x)'}=$

問題3 $z=e^{x-y^2}$ とする。x と y が t の関数であり（すなわち $x=x(t),\ y=y(t)$）、$t=0$ で $x=1,\ y=2$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2},\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{3}$ であるとき、$\frac{dz}{dt}$ の $t=0$ での値を求めよ。

20

$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ 」4　∂をd-(3)

$=e^{x-y^2}\frac{dx}{dt}+(-2y)e^{x-y^2}\frac{dy}{dt}$ 」10　(3) (3)

y抜け-(2)

-2抜け(-2)

$=e^{1-4}\frac{1}{2}-2\cdot2\cdot e^{1-4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=e^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)$

$\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ への代入なし(-5)

$=\frac{11}{6e^3}$

x,y への代入なし(-5)

$x(t)=1+\frac{1}{2}t$ …(2)

$y(t)=2-\frac{1}{3}t$ …(2)　$z=t$の式 $e^{-\frac{1}{9}t^2+\frac{11}{6}t-3}$ 6点

$+\frac{dz}{dt}$ (tの式)」 $t=0$を代入で正解 15点

10点

計算ミス(-2)

20

問題4 関数 $f(x,y)$ が関係式 $x\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial x}$ を満たすとする。このとき、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で定義される極座標に関して $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ が成立することを示せ。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

④ ① ① 10

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

∂とdの混用‥ −4

問題5 関数 $f(x,y) = -6xy + x^3 + y^3$ についてつぎの問の答えよ。

20

(10) (a) $f_x = 0$、$f_y = 0$ となる点 (x,y) をすべて求めよ。

$f_x = -6y + 3x^2 = 0 \quad \therefore x^2 = 2y$ ②

$f_y = -6x + 3y^2 = 0 \quad \therefore y^2 = 2x$ ②

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2$

$-6x + \frac{3}{4}x^4 = 0$

$\frac{3}{4}x(x^3 - 8) = 0$

$x = 0,\ 2$

$x = 0$ のとき $y = 0$

$x = 2$ のとき $y = 2$

$(x,y) = (0,0),\ (2,2)$ まちがった解 1ケ −1

③ ③

式なしは 0点

(10) (b) 上の (a) で求めた各々の点について、$f(x,y)$ が極大値をとる、極小値をとる、極値をとらないのいづれであるかを判定せよ。

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -6$ $\quad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36(xy-1)$

① ① ② ①

$(x,y) = (0,0)$ では $f_{xx} = 0$, $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36 < 0$ (①) ∴ 極値をとらない ③

$f(0,0) = 0$

$(x,y) = (2,2)$ では, $f_{xx} = 12 > 0$, $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 108 > 0$ (①) ∴ 極小値をとる ③

$f(2,2) = -24 + 8 + 8 = -8$

＊ 他の点は無視（ひかない）

・$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を用いる‥‥ (0,0)で 6 > 0 判定：3階微分要 / (2,2)で 150 > 0 極小、 } 5点（×½）

・$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ を用いる 5点まで

・正・負の判定を逆にする ‥‥ 5点

・判定条件3ケをかく‥ 完全に正しいときのみ 3点