2002/8/2 実施分
建築建設工学科クラス

微分積分 I　学期末テスト問題1

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

1. 次の関数の導関数を計算せよ.

(a) $f(x) = e^x \arctan x$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^5}$.

(c) $f(x) = \sinh^{-1} x$.　($\sinh x$ の逆関数, $\mathrm{arcsinh} x$ とも書く)

2. 次の極限を求めよ.

(a) $f(x) = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$.

(b) $f(x) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

微分積分 I　学期末テスト問題 2

学籍番号　　　　　　　氏名

3. $f(x) = \tan x$ について以下の問いに応えよ.

   (a) $f'(x)$ 及び $f''(x)$ を求めよ.

   (b) $f(x)$ の $x = \dfrac{\pi}{3}$ での 2 次までのテイラー展開を求めよ. 但し, 剰余項（教科書の記号での R_3 ）は計算しなくてよい.

4. 次の関数 $f(x, y)$ について $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 及び $f_{xy}(x, y)$ を計算せよ.

   (a) $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$.

   (b) $f(x, y) = y^{\sin x}$.

微分積分 I　学期末テスト問題3

学籍番号　　　　　　　　氏名

5. $z=f(x,y)$ を x,y について何回でも微分可能な関数とし,

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}$$

とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ 及び $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2-\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ を変数 x,y に関する z の偏導関数を用いて表せ（高階偏導関数も用いてよい）.

微分積分 I　学期末テスト問題 1

学籍番号　　　　　　　　　氏名

1. 次の関数の導関数を計算せよ. n 階を[illegible]した者あり

arctan x を $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ とかきなおした者あり

8

(a) $f(x) = e^x \arctan x$.

$$f'(x) = (e^x)' \arctan x + e^x (\arctan x)'$$
$$= e^x \arctan x + \frac{e^x}{1+x^2}$$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ に 3点. これのみまちがい…-3で 5

$\frac{1}{1+x^2}$ がでていたら 1点

8

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^5}$.

$$f'(x) = -5\,(2x-1)^{-6} \cdot (2x-1)'$$
$$= -\frac{10}{(2x-1)^6}$$

5　③　2

1　4　6　4　1

$(2x-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

$(2x-1)^6 =$

$-$ぬけ… -2

(c) $f(x) = \sinh^{-1} x$. ($\sinh x$ の逆関数, arcsinh$x$ とも書く)

8

$y = \operatorname{arcsinh} x$

$x = \sinh y$

$\dfrac{dx}{dy} = \cosh y$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cosh y}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$ $\left(\because \begin{array}{l}\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \\ \cosh y > 0\end{array}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\dfrac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)}$ に 4点.

± なら 3点

$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ に 4点.

$\left(\dfrac{1}{\sinh x}\right)'$ … 0点. $= \dfrac{-\cosh x}{\sinh^2 x}$

$$\left\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

答だけ … 0点.

2. 次の極限を求めよ.

8

(a) $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x}$.

$\log x \to \infty$, $x \to \infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x)'}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$
$$= 0$$

ロピタル … 2点

(条件確認なし … 6点まで)

8

(b) $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + O(x^4)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + O(x)\right)$$
$$= \frac{1}{6}$$

$\dfrac{f'}{g'}$ を $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ とかく者あり

ロピタル一回まで 4点.

前後で同じまちがいが多い
→ 2枚あるので横におくとみれる

微分積分 I　学期末テスト問題2

学籍番号　　　　　　氏名

3. $f(x) = \tan x$ について以下の問いに応えよ.

10　(a) $f'(x)$ 及び $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 5$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\cos^3 x}(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad 5$$

－サインは1点

$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'}{(\cos x)'} = \frac{\cos x}{-\sin x}$ という誤答あり

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

$y' = 1 + y^2$

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$

10　(b) $f(x)$ の $x = \frac{\pi}{3}$ での2次までのテイラー展開を求めよ. 但し, 剰余項 (教科書の記号での R_3) は計算しなくてよい.

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3},\quad f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4,\quad f''\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8\sqrt{3}$$

$x - \frac{\pi}{3}$ を x とかいたら3点

$$\therefore f(x) = \sqrt{3} + 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + R_3$$

4. 次の関数 $f(x,y)$ について $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 及び $f_{xy}(x,y)$ を計算せよ.

10　(a) $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$.

3　$f_x = 4x^3 + 2xy^2$

3　$f_y = 2x^2y + 4y^3$

4　$f_{xy} = 4xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ というたり算もあり

10　(b) $f(x,y) = y^{\sin x}$.

3　$f_x = y^{\sin x} \log y \left(\frac{\partial}{\partial x}\sin x\right) = y^{\sin x}(\cos x)(\log y)$

3　$f_y = \sin x\, y^{\sin x - 1}$

4　$f_{xy} = \cos x\left(\frac{\partial}{\partial y}\, y^{\sin x} \log y\right)$

$= \cos x\left(\sin x\, y^{\sin x - 1}\log y + y^{\sin x}\frac{1}{y}\right)$

$= y^{\sin x - 1}\cos x\,(\sin x \log y + 1)$

cf. $f_{yx} = \cos x\, y^{\sin x - 1} + \sin x\, (y^{\sin x - 1}\log y \cos x) = f_{yx}$

微分積分 I　学期末テスト問題3

学籍番号　　　　　　氏名

5. $z = f(x, y)$ を x, y について何回でも微分可能な関数とし,

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

とするとき, 以下の問いに答えよ.

5

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2点

or

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

± をいれちがえ … 3

$\dfrac{\partial z}{2\partial x} + \dfrac{\partial z}{2\partial y}$ のような書き方をする者あり

15

(b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ 及び $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ を変数 x, y に関する z の偏導関数を用いて表せ (高階偏導関数も用いてよい).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} z = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right) z$$

$$= \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} z = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right) z$$

$$= \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad 5 \qquad \left(\text{or } \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\right)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \quad 5$$