情報メディア工学科１年生 微分積分 I 中間テスト問題 2002年6月21日1限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学籍番号と氏名を明記せよ。

1. $y = \arctan(2x)$ のグラフを描け。値のわかっている点の座標を書き入れたり、傾きのわかっている点での接線を点線で描き入れるなどして、できるだけ精密に描け。

2. $y = \left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)^x$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

3. $y = x^2 \sinh x$ のとき $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ を求めよ。ただし、n は２以上の偶数とする。

4. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arcsin\dfrac{1}{4}\right)$ の値を求めよ。

5. ２つの関数 $y = f(g)$ および $g = \dfrac{1}{x}$ を合成して得られる関数 $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ について下記の小問 **a** ～ **c** に答えよ。

ただし、$f'(g) = \dfrac{df(g)}{dg}$、$f''(g) = \dfrac{d^2 f(g)}{dg^2}$、$f'''(g) = \dfrac{d^3 f(g)}{dg^3}$ である。

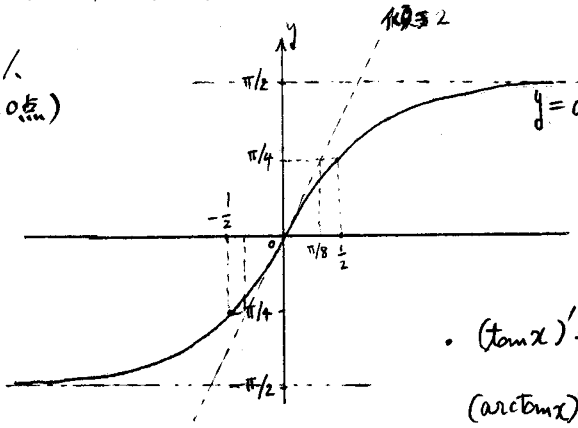
a. $\dfrac{d}{dx} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を $x, f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を用いて表せ。

b. $\dfrac{d^2}{dx^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を $x, f'\left(\dfrac{1}{x}\right), f''\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を用いて表せ。

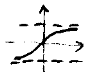
c. $\dfrac{d^3}{dx^3} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を $x, f'\left(\dfrac{1}{x}\right), f''\left(\dfrac{1}{x}\right), f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を用いて表せ。

2002/6/21 情報・メディア工学科　微積Ⅰ 中間試験　解答

1.
(20点)



$y=\arctan(2x)$

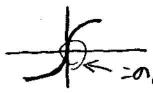
・概形  7点、多枝は不可

・値域 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 7点.

・$y'(0)=2$　6点、，傾き記入なし 18点まで

・その他の点も考慮.

・$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ だが.
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{\arccos^2 x}$ ではない.

・ ←このように $y'(0)=\infty$ となっていたら減点、

2.
(20点)

$$y' = y\,(\log y)' = \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^x \left(x \log\left(\arctan \frac{1}{x}\right)\right)'$$
$$= \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^x \left(\log\left(\arctan \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{\arctan \frac{1}{x}} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^x \left(\log\left(\arctan \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{(x^2+1)\arctan \frac{1}{x}}\right)$$

3.
(20点)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \binom{n}{0} x^2 (\sinh x)^{(n)} + \binom{n}{1} 2x (\sinh x)^{(n-1)} + \binom{n}{2} 2 (\sinh x)^{(n-2)}$$
$$= x^2 \sinh x + 2nx \cosh x + n(n-1)\sinh x$$
$$= \{x^2 + n(n-1)\} \sinh x + 2nx \cosh x$$

・微分を表す右肩の数字は必ずカッコに入れよ。　・「数学的帰納法」は「推測」のことではない。

4.
(20点)

$$a = \arcsin \frac{1}{3}, \quad \sin a = \frac{1}{3}, \quad \cos a \overset{0<a<\frac{\pi}{2}}{=} +\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$b = \arcsin \frac{1}{4}, \quad \sin b = \frac{1}{4}, \quad \cos b \overset{0<b<\frac{\pi}{2}}{=} +\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1+2\sqrt{30}}{12}$$

5
(20点)

a. 6点.
$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{x}\right) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

b. 7点.
$$\frac{d^2}{dx^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

c. 7点.
$$\frac{d^3}{dx^3} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{4}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\left(-\frac{1}{x^2}\right) f''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^6} f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$