情報・メディア工学科１年生 微分積分Ｉ　《 学期末試験問題 》　2001 年 8 月 3 日 1 限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学籍番号と氏名を明記せよ。裏面も使用してよい。

1. 下記の小問 (i)、(ii) に答えよ。[20 点]

(i) 関数 $f(x) = \arctan x$ を $x = 0$ のまわりに x の 3 次の項までテーラー展開せよ。剰余項は $\mathcal{O}(x^4)$ と略記してよい。

【注】 $f(0) = 0$、 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ である。

(ii) 関数 $f(x) = \{1 - \log(1+x) - \log(1-x)\}^{-1/2}$ を $x = 0$ のまわりに x の 5 次の項までテーラー展開せよ。剰余項は $\mathcal{O}(x^6)$ と略記してよい。

【注】 既知の展開を合成すれば比較的容易に求まる。

2. 下記の極限値 (i)、(ii) を求めよ。[20 点]

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2(e^x - 1)}$　　　**(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^x$

3. 2 変数関数 $f(x,y) = (x+y)^{x+1}$ について下記の偏導関数 (i)、(ii) を求めよ。[20 点]

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$　　　**(ii)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

4. 底面の円の半径が r [m] 、高さが h [m] の円錐の体積 V [m^3] は $V = \dfrac{\pi}{3} r^2 h$ と表わされる。ある時刻において、r は値が 4 [m] で、$\frac{1}{9}$ [m/秒] の割合で減少している (即ち $r = 4, \dfrac{dr}{dt} = -\frac{1}{9}$)。また、$h$ は値が 6 [m] で、$\frac{1}{2}$ [m/秒] の割合で増加している (即ち $h = 6, \dfrac{dh}{dt} = \frac{1}{2}$)。この時刻における V の増加率 [m^3/秒] を (即ち $\dfrac{dV}{dt}$ を) 求めよ。[20 点]

【注】円周率 π を 3.14 などの近似値におきかえたり分数を小数で近似したりしないで答えよ。

5. 2 変数関数 $f(x,y)$ について考える。2 変数 (x,y) が別の 2 変数 (u,v) によって

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& u^2 \cos v \\ y &=& u^2 \sin v \end{array}\right.$$

のように表されるとき、 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を u、v、$\dfrac{\partial f}{\partial u}$、$\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を用いて表せ。ただし、$u \neq 0$ とする。[20 点]

【注】 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$、$\dfrac{\partial f}{\partial v}$ は、それぞれ、$\dfrac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial u}$、$\dfrac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial v}$ を意味する。

1. (i)

10点

$$f(x) = \arctan x, \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \boxed{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}\ \text{2点}, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \boxed{\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}}\ \text{2点} \quad f'''(0) = -2$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + O(x^4) \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

$$= 0_{(2)} + 1_{(2)} \cdot x + \frac{0}{2}_{(3)} \cdot x^2 + \frac{-2}{6}_{(3)} x^3 + O(x^4)$$

等号なし --- サ①まで

$$= \underline{x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)}$$

「$\frac{1}{3}x^3$」は (−2)

(ii)

10点

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^6) \ (1)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + O(x^6) \ (1)$$

$$\therefore \log(1+x) + \log(1-x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) \ (1) \quad (3)$$

or,

$$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

$$(1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2}y^2 + O(y^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + O(y^3) \ (4) \quad (3)$$

代入の誤り −サ②

$$\therefore \{1 - \log(1+x) - \log(1-x)\}^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right) + \frac{3}{8}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right)^2 + O\left(\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right)^3\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right) + \frac{3}{8}\left(x^4 + O(x^6)\right) + O(x^6)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}O(x^6) + \frac{3}{8}O(x^6) + O(x^6) \quad (4)$$

$$= \underline{1_{(1)} - \frac{1}{2}x^2_{(2)} + \frac{1}{8}x^4_{(2)} + O(x^6)}$$

$$+ 0x_{(1)} \quad + 0x^3_{(2)} \quad + 0x^5_{(2)}$$

各ブロック サ 1点づつ

2、(i)

10点、

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-t-\frac{1}{2}t^2}{t^2(e^t-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+O(t^4)-1-t-\frac{1}{2}t^2}{t^2(1+t+O(t^2)-1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{6}t^3(1+O(t))}{t^3\cdot(1+O(t))}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{6}(1+O(t))}{1+O(t)}=\frac{1}{6}$$

解法なしの解答不着 → 2割減

別解

0/0型を明示 → (+) +1点

$$\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{e^t-1}^{\to 0}-\overbrace{t}^{\to 0}-\overbrace{\tfrac{1}{2}t^2}^{\to 0}}{\underbrace{t^2}_{\to 0}\,\underbrace{(e^t-1)}_{\to 0}}\ \overset{\text{(ロピタルの定理)}}{=}\ \lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{e^t-1}^{\to 0}-\overbrace{t}^{\to 0}}{\underbrace{2t}_{\to 0}\,\underbrace{(e^t-1)}_{\to 0}+\underbrace{t^2e^t}_{\to 0}}$$

1点 」3

$$\overset{(\because\text{ロピタル})}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{e^t-1}^{\to 0}}{2\underbrace{(e^t-1)}_{\to 0}+\underbrace{2te^t+2te^t}_{4te^t\to 0}+\underbrace{t^2e^t}_{\to 0}}\ \overset{(\because\text{ロピタル})}{=}\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{2e^t+4e^t+4te^t+2te^t+t^2e^t}$$

」6 」9

$$=\frac{1}{2\cdot 1+4\cdot 1+0+0+0}=\frac{1}{6}$$

やり方正しく違い答 {5点～8点

(ii) 10点

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{\log\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^x\right\}$$ 」2

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{2x+3}{2x+2}}{\frac{1}{x}}\right\}=(※)$$ 」2 ここで、

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x+3}{2x+2}=\dfrac{2+\frac{3}{x}}{2+\frac{2}{x}}\to\dfrac{2}{2}=1\ \text{だから}\ \log\dfrac{2x+3}{2x+2}\to\log 1=0\\ \dfrac{1}{x}\to 0\end{array}\right\}\text{なので}$$ 」2

ロピタルの定理が適用できて、$\left(\log\frac{2x+3}{2x+2}\right)'=\{\log(2x+3)\}'-\{\log(2x+2)\}'$ より

$$(※)=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2x+3}-\frac{2}{2x+2}}{-\frac{1}{x^2}}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(2x+3)(2x+2)}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2}{(2+\frac{3}{x})(2+\frac{2}{x})}\right\}=\exp\frac{2}{2\cdot 2}=\exp\frac{1}{2}=\sqrt{e}$$

答 = 1/2 としたら (−1)

別解

$t=2x+2$ とおくと、$\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^x=\left(\frac{t+1}{t}\right)^{(t-2)/2}$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}}$$

$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}}=\sqrt{e\cdot 1^{-2}}=\sqrt{e}$$

但し、$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ を既知の公式として利用した。

3. (i) 10点

$(f^s)' = s f^{s-1} f'$ （sは定数）だから、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x+y)^{x+1} = (x+1)(x+y)^x \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}_{=1} = (x+1)(x+y)^x$$

(ii) 10点

$f' = f(\log f)'$ より　2点まで

c.f. $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(x+y)^x + (x+y)^{x+1}\log(x+y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x+1)(x+y)^x = \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x+1)\right\}(x+y)^x + (x+1)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^x$$

(4) 2点まで

$$= (x+y)^x + (x+1)(x+y)^x \frac{\partial}{\partial x}\{x\log(x+y)\}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ として求めていて たんに順番をとりちがえておぼえている→

$$= (x+y)^x + (x+1)(x+y)^x\left\{\log(x+y) + x\frac{1}{x+y}\right\}$$

$$= \underbrace{(x+y)^x}_{3} + \underbrace{(x+y)^x(x+1)\log(x+y)}_{3} + \underbrace{x(x+1)(x+y)^{x-1}}_{3}$$

4. 20点

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} \quad (6)$$

∂をd → (−1) 4番（全体で−1点）

$$= \frac{\pi}{3}2rh\frac{dr}{dt} + \frac{\pi}{3}r^2\frac{dh}{dt} \quad (6)$$

$$= \frac{\pi}{3}2\cdot4\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) + \frac{\pi}{3}\cdot4^2\cdot\frac{1}{2} \quad (4)\ \text{各値代入に点}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(-\frac{16}{3} + 8\right) = \frac{8}{9}\pi \quad [\mathrm{m^3/秒}] \quad (4)$$

$r = 4 - \frac{1}{9}t$, $h = 6 + \frac{1}{2}t$ を V に代入し、$\frac{dV}{dt}$ を計算し $t=0$ を代入 …… 正解で 7点まで

$t=0$ を代入してない 7 ……

これだけの情報で求まるのだから $r(t)$, $h(t)$ を仮定しても求まるはずである

5. 20点

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\cos v & 2u\sin v \\ -u^2\sin v & u^2\cos v \end{pmatrix}$$ とすると

∂をd → (−1)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(2)

$$J^{-1} = \frac{1}{2u\cos v\cdot u^2\cos v - 2u\sin v\cdot(-u^2\sin v)}\begin{pmatrix} u^2\cos v & -2u\sin v \\ u^2\sin v & 2u\cos v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos v}{2u} & -\frac{\sin v}{u^2} \\ \frac{\sin v}{2u} & \frac{\cos v}{u^2} \end{pmatrix}$$ を

JとJ⁻¹のとりちがえ 以外 consistent → 7点

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$ に代入すると」（ここまでで 12点）

「$\frac{\partial x}{\partial u} \neq \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}$ に注意」

→ これを使ったら 7点

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos v}{2u}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial f}{\partial v} \quad (4)\ (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin v}{2u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\cos v}{u^2}\frac{\partial f}{\partial v} \quad (4)\ (4)$$