情報メディア工学科１年生 微分積分 I 中間テスト問題 2001 年 6 月 15 日 1 限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学籍番号と氏名を明記せよ。

1. 漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 7}$ と初期値 $a_1 = 10$ で定義される数列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の最初の３０項を電卓で計算して求めたところ、この数列は 4.414 くらいの値に収束するらしいことがわかった。そのあたりの数に収束すると仮定して、収束値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ の正確な値を求めよ。

【注】 仮定するということの意味がわかっているかを見たいので、仮定したことを確かめるようなことは一切答案に書かないようにしてください。この指示にもかかわらず冗長な答案を書いた人は、理解せずに答をただ丸暗記してきたものとみなします。

2. $\arcsin\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3} = \arcsin x$ を満たす x の値を求めよ。

3. $x > 0$ のとき、$x^{\log x}$ を微分せよ。

4. $f(x) = x^2 e^x$、$n \geq 2$ とする。このとき、$f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ の表式を求めよ。

5. $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x^2)$ を $x, f'(x^2), f''(x^2)$ を用いて表せ。
ただし、 $f'(u) = \dfrac{df(u)}{du}$、$f''(u) = \dfrac{d^2 f(u)}{du^2}$ である。

情報メディア工学科１年生 微分積分Ｉ中間テスト (2001年6月15日1限実施) の解答と結果

1. (20点)

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と仮定すると $a = \sqrt{6a-7}$

$\therefore\ a^2 = 6a-7$, $a^2-6a+7=0$, $\therefore\ a = 3\pm\sqrt{2}$

4.414 に近い方の値をとって. $a = \underset{\sim\sim\sim}{3+\sqrt{2}}$

2. (20点)

$a = \arcsin\frac{1}{2}$ とおくと. $\sin a = \frac{1}{2}$, $0<a<\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = \arcsin\frac{1}{3}$ とおくと. $\sin b = \frac{1}{3}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \cos b = \sqrt{1-\sin^2 b} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$x = \sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3}\right) = \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}}$

3. (20点)

$x = e^{\log x}$ だから $x^{\log x} = (e^{\log x})^{\log x} = e^{(\log x)^2}$

$\therefore\ (x^{\log x})' = \{e^{(\log x)^2}\}'$

$= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}$, $f(g)=e^g$, $g(h)=h^2$, $h(x)=\log x$

$= e^g\cdot 2h\cdot\frac{1}{x} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2e^{(\log x)^2}\log x}{x}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2x^{\log x}\log x}{x}} = \underset{\sim\sim\sim}{2x^{\log x-1}\log x}$

4. (20点)

$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^2)^{(i)}(e^x)^{(n-i)}$

$= \binom{n}{0}x^2e^x + \binom{n}{1}2xe^x + \binom{n}{2}2e^x + 0 + \cdots + 0$

$= \underset{\sim\sim\sim}{\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x}$

5. (20点)

$\{f(x^2)\}' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2)$

$\{f(x^2)\}'' = \{2xf'(x^2)\}' = (2x)'f'(x^2) + 2x\{f'(x^2)\}'$

$= 2f'(x^2) + 2xf''(x^2)(x^2)'$

$= \underset{\sim\sim\sim}{2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2)}$

情報メディア工学科１年生 微分積分 I 中間テスト (2001 年 6 月 15 日 1 限実施) の解答と結果

【コメント】

問 **1**. 「下に有界、単調減少」は収束するための条件です。収束することを仮定しているのだから、有界とか単調とかを言う必要はありません。通常は余分なことを書いても間違いとはしませんが、この問題に限っては断わり書きをつけてあるので、有界とか単調をうんぬんしている答案は 5 点減点しました。減点された人は、今後他の問題に対するときにも、答案の各部分が何のための議論であるかをよく考えるようにして、もっと論理性を身につけてください。

問 **2.** $a = \frac{\pi}{6}$ ですが、この値を使わなくても解けるわけです。

「 $|c| \leq 1$ に対して $|\arcsin(c)| \leq \frac{1}{2}\pi$ なので $\cos(\arcsin(c)) \geq 0$」という趣旨の記述を是非答案に含めて欲しいものです。それを言わないと $\cos(a) = \pm\sqrt{1-\sin^2 a}$ の右辺の複号の正符号のみを採用する理由がわかりません。ただ、今回は減点しませんでしたが。

問 **3**. 多い間違いは、$(x^s)' = sx^{s-1}$ と同様に考えて $(x^{\log x})' = \log x \cdot x^{\log x - 1}$ としたものです。これではこの問題の重要な点 (s は定数だが $\log x$ は関数) が全く把握できていないことになるので、これに類した答案はきびしく零点としました。

問 **4**. 高階微分を表す 右肩の (n) という記号は、べき乗と混同なく読み取れるように区別して書いてください。即ち、 $g(x)^3 = g(x) \cdot g(x) \cdot g(x)$ ですが、$g(x)^{(3)} = \frac{d^3}{dx^3} g(x)$ であるわけです。混同を防止するべく臨機応変に配慮する必要があります。例えば、$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^2$ を $x^{2(n-k)}$ と書くと、x の $2 \cdot (n-k)$ 乗のようとられる可能性があることに自分で気づくべきであり、たとえば $(x^2)^{(n-k)}$ などという書き方にスイッチできるようになるべきです。大学以降は、定義があいまいな記法や、同じ記号が多義に使用されることによく遭遇するでしょう。混同のおきないように気を配り自分で工夫することが必要です。

また、最初の数階の微分を計算して、そこから、一般式を推測し、数学的帰納法で証明するという方法による答案が多かったですが、これは大学入試の受験勉強で身につけた解法だと思います。その解法でも正解ではありますが、なるべく大学で新しく学んだことを使ってみて欲しいと思います。そして、決して、受験勉強の遺産で大学の数学を乗り切ろうとはしないように願います。大学で新しく学ぶことがらを練習するために問題を出しているのであって、その問題を解くこと自体が最終目的なのではありません。

問 **5**. 合成関数の微分法 (教科書 p.45 の下半分) であることに気づかない人が全体の $\frac{2}{3}$ を占めました。

【成績】

受験者数 89 人, 平均点 点, 標準偏差 点

【総合点】(１年生＋過年度生)

得点	人数	棒グラフ (* = １人)
0〜9		
10〜19		
20〜29		
30〜39		
40〜49		
50〜59		
60〜69		
70〜79		
80〜89		
90〜100		

【小問ごとの得点】 (１年生 75 人分)

得点	問１	問２	問３	問４	問５
0〜4					
5〜9					
10〜14					
15〜19					
20〜20					
平均点					