材料・知能２年生対象 微分積分Ｉ学期末試験問題 2000年7月28日3限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科、学年、学籍番号、氏名を明記せよ。

1. $2^{\arctan x}$ を x で微分せよ。

2. $z = x^{y^2}$ とする。x、y が変数 t の関数であるとき、$\dfrac{dz}{dt}$ を、x、y、$\dfrac{dx}{dt}$、$\dfrac{dy}{dt}$ を用いて表せ。

【注】問題の言う $z = x^{y^2}$ とは、$z = x^{(y^2)}$ であって、$z = (x^y)^2$ ではない。
また、$\dfrac{dz}{dt}$ とは、x、y の２変数関数 $z(x,y)$ を t の１変数関数 $\tilde{z}(t) = z\,(x(t), y(t))$ ととらえて t で微分したもの $\dfrac{d\tilde{z}(t)}{dt}$ のことである。

3. ２変数の組 (x,y) から別の２変数の組 (u,v) への変数変換

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) \\ v &= xy \end{cases}$$

を考える。このとき $\dfrac{\partial}{\partial u}$、$\dfrac{\partial}{\partial v}$ を x、y、$\dfrac{\partial}{\partial x}$、$\dfrac{\partial}{\partial y}$ で表せ。

【注】問の意味がわかりにくい人は、次のように問題を読み替えて答えてもよい。「２変数 u,v の関数 $f(u,v)$ が与えられたとき、２変数 x、y の関数 $g(x,y)$ を $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ と定義する。このとき、$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}$、$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ を x、y、$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$、$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ で表せ。」

4. $\log(\cos x - \sin x)$ を $x = 0$ のまわりに x の２次の項までテーラー展開せよ。剰余項は $\mathcal{O}(x^3)$ と略記してよい。

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ をロピタルの定理を使って求めよ。

2000/7/28/3限　材料2年,知能2年　微積I期末試験問題解答

1、
$$\left(2^{\arctan x}\right)' = \left\{e^{(\log 2) f}\right\}', \quad f = \arctan x$$
$$= e^{(\log 2) f} \log 2 \; f'$$
$$= 2^{\arctan x} \log 2 \; \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \underline{\frac{\log 2}{1+x^2} 2^{\arctan x}}$$

2、
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \quad z = x^{(y^2)}$$
$$= \underline{y^2 x^{y^2-1}\frac{dx}{dt} + 2y\, x^{y^2} \log x \frac{dy}{dt}}$$

3、
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$
$$J^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$
$$\underline{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}} = J^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

4.
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$$
$$\cos x - \sin x = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$
$$\log(\cos x - \sin x) = \left\{-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right\} - \frac{1}{2}\left\{-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right\}^2 + O(x^3)$$
$$= \underline{-x - x^2 + O(x^3)}$$

5、
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \exp \lim_{x\to\infty} x \log\left(1+\frac{2}{x}\right) = \exp \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\log\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}$$
$$= \exp \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \exp \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = \exp 2 = \underline{e^2}$$