材料開発工学科１年生 微分積分Ｉ学期末試験問題 2000年7月28日2限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学籍番号と氏名を明記せよ。

なお、後期の授業「微分積分 II」のクラス分け表は９月中頃に学科掲示板に掲示する。

1. $\left\{\arctan\left(x^2\right)\right\}^2$ を x で微分せよ。

2. $z = \left(\dfrac{1}{x}\right)^y$ とする。x、y が変数 t の関数であるとき、$\dfrac{dz}{dt}$ を、x、y、$\dfrac{dx}{dt}$、$\dfrac{dy}{dt}$ を用いて表せ。

【注】$\dfrac{dz}{dt}$ とは、x、y の２変数関数 $z(x,y)$ を t の１変数関数 $\tilde{z}(t) = z\left(x(t), y(t)\right)$ ととらえて t で微分したもの $\dfrac{d\tilde{z}(t)}{dt}$ のことである。

3. ２変数の組 (x,y) から別の２変数の組 (u,v) への変数変換

$$\begin{cases} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{cases}$$

を考える。このとき $\dfrac{\partial}{\partial u}$、$\dfrac{\partial}{\partial v}$ を x、y、$\dfrac{\partial}{\partial x}$、$\dfrac{\partial}{\partial y}$ で表せ。

【注】問の意味がわかりにくい人は、次のように問題を読み替えて答えてもよい。「２変数 u,v の関数 $f(u,v)$ が与えられたとき、２変数 x、y の関数 $g(x,y)$ を $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ と定義する。このとき、$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}$、$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ を x、y、$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$、$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ で表せ。」

4. $(\sin x + \cos x)^{1/3}$ を $x=0$ のまわりに x の２次の項までテーラー展開せよ。剰余項は $\mathcal{O}(x^3)$ と略記してよい。

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$ を求めよ。

2000/7/28/2限　材料1年　微積Ⅰ期末テスト解答

1. $\left[\left\{\arctan(x^2)\right\}^2\right]' = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dy}\dfrac{dy}{dx}$, $\left(f = g^2,\ g = \arctan y,\ y = x^2\right)$

$$= 2g\frac{1}{1+y^2}2x = \frac{4x}{1+x^4}\arctan x^2$$

2、 $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = -y\left(\dfrac{1}{x}\right)^{y+1}\dfrac{dx}{dt} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^y \log\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$

3、 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^x\cos y & e^x\sin y \\ -e^x\sin y & e^x\cos y \end{bmatrix}$

$$J^{-1} = \frac{1}{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos y & -e^{-x}\sin y \\ e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = J^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos y\frac{\partial}{\partial x} - e^{-x}\sin y\frac{\partial}{\partial y} \\ e^{-x}\sin y\frac{\partial}{\partial x} + e^{-x}\cos y\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

4. $(1+y)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{9}y^2 + o(y^3)$ $\quad\because \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2} = -\dfrac{1}{9}$

$$\sin x + \cos x = x + o(x^3) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$
$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\therefore (\sin x + \cos x)^{1/3} = \left\{1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right\}^{1/3}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{9}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^3)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}x^2 + o(x^3)$$

5、 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \exp\lim_{x\to 0} x\log(\sin x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log(\sin x)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\sin x)^{\to\infty}}{\frac{1}{x}_{\to\infty}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \cos 0\lim_{x\to 0}\frac{x^2 {}^{\to 0}}{\sin x_{\to 0}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^{\to 0}}{\cos x_{\to 1}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \exp 0 = 1$$